INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Análise Matemática IV - A

$2^{\underline{o}}$ Semestre 2006/2007

Cursos: LMAC, LEFT, LEBM, LEA

Ficha de Problemas nº 11

1. Determine a solução da equação diferencial:

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

quer verifica as condições iniciais $y(0) = y'(0) = 1$.

2. Determine a solução da equação linear

$$y^{(4)} - y^{(3)} + 1 = b(t)$$

que verifica as condições iniciais $y(0) = y'(0) = y^{(3)}(0) = 0$, $y''(0) = 1$, quando:

(a) $b(t) = 0$ **(a)** $b(t) = t$ **(a)** $b(t) = e^t$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

3. Considere a equação:

$$y^{(3)} - 2y'' - 7y' - 4y = 0$$

Calcule a sua solução geral e determine para que condições iniciais o problema tem solução convergente quando $t \to \infty$.

4. Considere a equação:

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = 1 + \operatorname{sen} t \tag{1}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea associada a (1).

(b) Determine uma solução particular de (1).

(c) Determine a solução de (1) que verifica as condições iniciais $y(0) = y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0$.

5. Sejam $b, c \in \mathbb{R}$, $\omega_0 = \sqrt{|b^2 - c|}$ e $F \in C(\mathbb{R})$. Considere a equação:

$$y'' + 2b\,y' + cy = F(t) \tag{2}$$

(a) Escreva as soluções gerais da equação homogénea associada a (2), em função dos valores dos parâmetros b e c.

(b) Escreva uma equação vectorial da forma $\dot{\mathbf{Y}} = A\mathbf{Y} + \mathbf{H}(t)$, que seja equivalente a (2). Verifique que os valores próprios de A são as raizes do polinómio característico da equação homogénea associada a (2).

(c) Resolva a equação não homogénea no caso $b = 0$, $c > 0$, com $F(t) = F_0 \operatorname{sen}(\omega t)$, $F_0 \in \mathbb{R}^+$ (oscilações forçadas). Será conveniente tratar separadamente os casos $\omega \neq \omega_0$ (sem ressonância) e $\omega = \omega_0$ (com ressonância).

6. Considere um problema de valor inicial bem posto para a equação homogénea de ordem n:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{3}$$

com $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Escreva o problema de valor inicial para uma equação vectorial da forma $\dot{\mathbf{Y}} = A\mathbf{Y}$ que lhe é equivalente.

(a) Justifique que solução do problema original existe e é única.

(b) Verifique que os valores próprios de A são as raizes, $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ $(k \leq n)$ do polinómio característico de (3),

(c) Mostre que se λ é um valor próprio de A, então $v = (1, \lambda, \cdots, \lambda^{n-1})$ é um vector próprio associado a λ.