Análise Matemática IV - A

2º Semestre 2006/2007

Cursos: LMAC, LEFT, LEBM, LEA

Ficha de Problemas nº 1

1. Calcule (onde aplicável, considere funções valor principal):

(a) $(3-10i)(3+10i)$ **(b)** $\left(\frac{2-i}{2+i}\right)^{10}$ **(c)** $\log(-1)+\log(1+i)$ **(d)** $(-1)^{\pi/2}$

(e) $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{i}$ **(f)** $\sqrt{(2-2i)^4}$ **(g)** $\left(\sqrt{2-2i}\right)^4$

2. Esboce, no plano complexo, os seguintes conjuntos:

(a) $\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-\frac{1}{2}\right|\geq 1\right\}$

(b) $\left\{z\in\mathbb{C}:\left|\frac{1}{z-1+i}\right|<\sqrt{2}\right\}$

(c) $\{z\in\mathbb{C}:|z-1|<|z-i|\}$

(d) $\left\{z\in\mathbb{C}:2<\left|z-2+i\sqrt{3}\right|<\pi\right\}$

(e) $\left\{ze^{i\pi/4}:z\in\mathbb{C}\wedge -1\leq \operatorname{Re} z<1\wedge 0\leq \operatorname{Im} z<1\right\}$

3. Mostre que o módulo de um número complexo satisfaz (para qualquer $z,w\in\mathbb{C}$):

(a) $|zw|=|z||w|$

(b) $|z+w|\leq|z|+|w|$

(c) $|z-w|\geq\big||z|-|w|\big|$

Sugestões: Use a identidade $|z|^2=z\overline{z}$. Prove (c) a partir de (b).

4. Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações:

(a) $z^4+8=4z^2$ **(b)** $z^4-z^3+4^2-4z=0$ **(c)** $e^{-z}=-1$ **(d)** $\cos z=-2$

5. Seja $n\in\mathbb{N}$. Mostre os números complexos $\sqrt[n]{1}$ formam os vértices de um polígono regular de n lados, inscrito na circunferência $|z|=1$. Sugestão: decomponha o polígono em n triângulos.

6. Prove **três** das seguintes identidades:

(a) $\cos iz=\operatorname{ch} z$

(b) $\operatorname{sen} iz=i\operatorname{sh} z$

(c) $\operatorname{sen}^2 z+\cos^2 z=1$

(d) $\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1$

(e) $\operatorname{sen}(z+w)=\operatorname{sen} z\cos w+\cos z\operatorname{sen} w$

(f) $\cos(z+w)=\cos z\cos w-\operatorname{sen} z\operatorname{sen} w$

7. Utilizando a definição de limite, mostre que se $\lim_{z\to z_0} f(z)=l_1$ e $\lim_{z\to z_0} g(z)=l_2$ então $\lim_{z\to z_0}(f(z)+g(z))=l_1+l_2$.

8. Justifique que as seguintes funções são contínuas nos seus domínios:

(a) $\operatorname{Re} z$ **(b)** $|z|$ **(c)** z^3+2z^2 **(d)** $\frac{1}{z}$ **(e)** $e^{\operatorname{sen} z}$