Análise Matemática IV - A

2º Semestre 2006/2007

Cursos: LMAC, LEFT, LEBM, LEA

Ficha de Problemas nº 2

1. Utilizando as equações de Cauchy-Riemann, determine o conjunto de pontos onde as seguintes funções admitem derivada e calcule-a. (Nota: simplifique a expressão da derivada por forma a só mencionar z)

(a) e^x **(b)** sen x **(c)** $z^3 + 6z^2$ **(d)** $\frac{1}{z-2}$

(e) $2(z - \overline{z})$ **(f)** $|z^2|$ **(g)** $\log z^2$ (valor principal).

2. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2i|x|y$$

a) Determine o maior subconjunto de $A \subset \mathbb{C}$ onde f é holomorfa em A.

b) Calcule f' nos pontos onde f é holomorfa. Nota: uma função diz-se holomorfa num conjunto aberto $A \subset \mathbb{C}$ se para qualquer $a \in \mathbb{C}$, existe um disco centrado em a tal que f tem derivada em todos os pontos desse disco.

3. Seja $A \subset \mathbb{C}$, $a \in A$ e $f : A \to \mathbb{C}$ satisfazendo a *condição local de Lipshitz* em a: existem $\epsilon > 0$ e $L \in \mathbb{R}^+$ tais que para qualquer $z \in D(a, \epsilon)$, $|f(z) - f(a)| \leq L|z - a|$. Mostre que:

a) f é contínua em a.

b) Se f tem derivada em a então f satisfaz a condição local de Lipshitz em a. Conclua que, neste caso, f é contínua em a.

4. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f(z) = f(x + iy) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x.y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são verificadas em $(x, y) = (0, 0)$.

b) Verifique (utilizando a definição) que $f'(0)$ não existe.

c) Por que razão o resultado anterior não contradiz o Teorema de Cauchy-Riemann?

5. Mostre que se $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ são holomorfas em $\mathbb{C}$ então f é constante.

6. Seja $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e defina $A^* = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in A\}$. Se f é uma função holomorfa em A mostre que $F(z) = \overline{f(\overline{z})}$ é holomorfa em A^*.