Análise Matemática IV - A

2º Semestre 2006/2007

Cursos: LMAC, LEFT, LEBM, LEA

Ficha de Problemas nº 3

1. Seja γ uma curva simples, regular e $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ contínua em γ. Prove que:

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz$$

2. Calcule o valor dos seguintes integrais:

a) $\int_C \overline{z}dz$, onde C é o semcírculo unindo i a $-i$ (no sentido indicado).
b) $\int_C z^2 dz$, mesma curva que a).
c) $\int_C \overline{z}dz$, onde C é o segmento de recta que une i a $-i$ (no sentido indicado).
d) $\int_C z^2 dz$, mesma curva que c).

Comente os resultados.

3. Calcule o integral

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

onde:

a) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, escolhendo o ramo da função $\sqrt{z}$ tal que $\sqrt{1} = 1$.
b) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$, escolhendo o ramo da função $\sqrt{z}$ tal que $\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

Ambas as curvas são percorridas no sentido directo.

4. Seja $n \in \mathbb{Z}$. Se $\gamma(t) = a + re^{it}$, onde $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ e $t \in [0, 2n\pi]$. Descreva geometricamente, para cada n, o caminho γ e calcule:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}.$$

5. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$, com $0 \leq t \leq \pi$. Faça uma estimativa do valor de:

$$|I(R)| = \left| \int_{\gamma} \frac{4z^2 + 10}{z^4 + 3z^2 + 2} dz \right|,$$

que seja válida para R arbitrariamente grande (isto é, para certo $R_0 > 0$ a sua estimativa seja verificada para qualquer $R > R_0$). Use o seu resultado para calcular $\lim\limits_{R\to\infty} I(R)$.

6. Calcule os integrais:

a) $\displaystyle\int_{1+i}^{-1-i} 2z + 1dz$ **b)** $\displaystyle\int_0^i z\cos z dz$

c) $\displaystyle\int_0^i (z-i)e^z dz$

7. Sejam u, v funções reais de variável real contínuas em $[a,b]$. Sejam $X = \int_a^b u(t)dt$ e $Y = \int_a^b v(t)dt$. Pretende-se mostrar que:

$$\left| \int_a^b u(t) + iv(t)dt \right| \leq \int_a^b |u(t) + iv(t)|dt$$

Para tal, mostre que:

a) $X^2 + Y^2 = \displaystyle\int_a^b \big(Xu(t) + Yv(t)\big)dt + i\int_a^b \big(Xv(t) - Yu(t)\big)dt = \int_a^b \big(Xu(t) + Yv(t)\big)dt$

b) $Xu(t) + Yv(t) = \operatorname{Re}\Big((X - iY)\big(u(t) + iv(t)\big)\Big) \leq \sqrt{X^2 + Y^2}\,|u(t) + iv(t)|$

c) $\displaystyle\left| \int_a^b u(t) + iv(t)dt \right| = \sqrt{X^2 + Y^2} \leq \int_a^b |u(t) + iv(t)|dt$