Análise Matemática IV - A

2º Semestre 2006/2007

Cursos: LMAC, LEFT, LEBM, LEA

Ficha de Problemas nº 4

1. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f(x+iy) = x^2 - y^2 + e^x \cos y + i(2xy + e^x \operatorname{sen} y)$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Determine, justificando, o valor do integral:

$$\oint_\gamma \left(\frac{f(z)}{z+1} \right)^2 dz$$

onde $\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 4\}$. Apresente o resultado em função do Índice de γ relativo ao ponto apropriado.

2. Calcule o valor dos seguintes integrais:

a) $\displaystyle\oint_\gamma z^5 e^{i\pi z}\, dz$, onde γ^* é dada por $|z| = 117$.

b) $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\cos z}{z^3}\, dz$, onde γ^* é dada por $|z| = 1$.

c) $\displaystyle\oint_\gamma \frac{1}{z^3} \cos \frac{\pi}{z+1}\, dz$, onde γ^* é dada por $|z| = \frac{1}{4}$

d) $\displaystyle\oint_\gamma \frac{z \operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2}\, dz$, onde γ^* é dada por $|z| = 2$.

e) $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2}\, dz$, onde γ^* é dada por $|z| + |z-4| = 10$.

f) $\displaystyle\oint_\gamma \frac{1}{z^2+1}\, dz$, onde γ^* é dada por $|z-i| + |z+i| = 4$.

g) $\displaystyle\oint_\gamma \frac{e^{2z}}{(z-i)^{100}}\, dz$, onde γ^* é dada por $|z| = \frac{5}{4}$.

(Todas os caminhos são percorridos uma vez no sentido directo).

3. Determine as regiões onde as funções dadas estão bem definidas e são holomorfas:

a) $\displaystyle f(z) = \int_{|z|=1} \frac{e^{iw}}{(w^2 - z)^2}\, dw$, onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

b) $\displaystyle g(z) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{tz}}{1+t^2}\, dt$.

4. Mostre que as seguintes séries de funções convergem uniformemente nos conjuntos indicados:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^4+1}$ em $\overline{D(0,1)}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-n^2 \pi z}$ em $[\delta, \infty[\subset \mathbb{R}$, $\delta > 0$.

5. Estude quanto à convergência pontual e uniforme das seguintes séries de funções nos conjuntos indicados:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ em $D(0,1)$ e em $\overline{D(0,r)}$, com $0 < r < 1$.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$ em $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ em $\mathbb{C}$ e em $\overline{D(0,R)}$, com $R > 0$.

6. Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ seccionalmente regular e tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Pretende-se com este problema mostrar que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$. Para tal, justifique que:

a) $\displaystyle \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds$

b) $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ sse $\phi(b) = 1$, com:

$$\phi(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds \right)$$

c) $\displaystyle\frac{\phi}{\gamma - z}$ é constante (em $[a,b]$).

d) $\phi(b) = 1$. Conclua que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.