INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Análise Matemática IV - A

2º Semestre 2006/2007

Cursos: LMAC, LEFT, LEBM, LEA

Ficha de Problemas nº 5

1. Determine o raio de convergência e caracterize o interior das regiões de convergência (pontual e uniforme) das seguintes séries de potências:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (z-i)^n$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n!}$ **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(3+(-1)^n\big)^n (z-2)^n$

2. Admitindo que a série de potências estudada em 1.d), $\sum_{n=1}^{\infty} \big(3+(-1)^n\big)^n (z-2)^n$, é a série de Taylor de uma função f holomorfa em todo o seu domínio, calcule $f(0)$.

3. Determine os desenvolvimentos em série de Taylor das seguintes funções, em torno dos pontos indicados:

a) $z \operatorname{sen} z$ em torno de $z_0 = \pi$.

b) $z^2 e^{2z}$ em torno de $z = -1$.

c) Ramo $\alpha = 0$ do logaritmo, ou seja,

$$\log z = \log|z| + i \arg z \quad \text{com} \quad 0 \leq \arg z < 2\pi,$$

em torno de $z = i + 1$.

4. Para cada função e regiões indicadas, determine a respectiva série de Laurent:

a) $e^{\frac{1}{z-1}} + \dfrac{1}{z}$ para $0 < |z-1| < 1$.

b) $\dfrac{1}{(z-2\pi i)^2}$ nas regiões dadas por $|z-\pi i| < \pi$ e $|z-\pi i| > \pi$.

5. Determine a série de Laurent de $\dfrac{1}{(z^2-3z+2)^2}$ nas seguintes regiões:

a) $0 < |z-1| < 1$ **b)** $|z-1| > 1$.

Aproveite os resultados anteriores para calcular:

c) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1/2} \frac{dz}{(z^2-3z+2)^2}$ **d)** $\displaystyle\oint_{|z-1|=3/2} \frac{dz}{(z^2-3z+2)^2}$.

(Todas as curvas são percorridas uma vez no sentido directo).

6. Determine e classifique as singularidades (isoladas) das seguintes funções, e calcule os resíduos correspondentes:

a) $\dfrac{1}{z - z^3}$ **b)** $\dfrac{z^4}{1+z^4}$ **c)** $\dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z}$

d) $\dfrac{\cos z - 1}{z^2}$ **e)** $\dfrac{1}{z^8(z-1)}$

7. Determine e classifique as singularidades (isoladas) das funções indicadas, incluindo no seu estudo a singularidade no infinito. Calcule os resíduos correspondentes.

a) $\dfrac{1}{z^3 - z^5}$ **b)** $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$ **c)** $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$

8. Dê um exemplo de uma função, g, holomorfa em todo o plano complexo excepto num conjunto numerável de pontos e que não possui uma singularidade isolada no infinito.

9. Calcule os integrais:

a) $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z^4+1}$ onde $C^* = \{z = x + iy : x^2 + y^2 = 2x\}$

b) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$ (Sugestão: use o resíduo no infinito).

c) $\displaystyle\oint_{|z|=3} (1 + z + z^2)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}}\right) dz$

(Todas as curvas são percorridas uma vez no sentido directo).

10. Prove que se f é holomorfa em z_0 e $f(z_0) = 0$ então existe um número natural n, um disco $D(z_0, r)$ e uma função φ holomorfa em $D(z_0, r)$ verificando $\varphi(z_0) \neq 0$, tais que:

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z) \quad \forall z \in D(z_0, r)$$

(Neste caso, diz-se que f tem um zero de multiplicidade (ou ordem) n em z_0). Mostre que se f tem um zero de multiplicidade n em z_0 então $1/f$ tem um polo de ordem n em z_0.

11. Seja f uma função holomorfa no seu domínio cujas singularidades são exclusivamente de tipo polo. Considere a derivada logaritmica de f, que é definida por:

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Justifique que g:

a) Tem um polo simples em qualquer polo de f. Indique os respectivos resíduos.

b) Tem um polo simples em qualquer zero de f. Indique os respectivos resíduos.

c) Não tem outras singularidades, para além das acima referidas.