Análise Matemática IV - A

2º Semestre 2006/2007

Cursos: LMAC, LEFT, LEBM, LEA

Ficha de Problemas nº 6

1. Utilizando o resíduo em $z = \infty$, calcule os integrais:

a) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^{12}+1}$ **b)** $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{2z^{999}+1}{z^{1000}+1}\, dz$

2. Utilizando o teorema dos resíduos, estabeleça os seguintes resultados:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}},$ em que $a > 1$.

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos^4 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx = 2\pi\left(\sqrt{2}-\frac{5}{4}\right).$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{8}.$

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{x^3-x} dx = \frac{\pi}{2}\big(\cos a - 1\big),$ em que $a > 0$.

e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos 3x - 1}{x^2}\, dx = -\frac{3\pi}{2}.$

f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^m+1}\, dx = \frac{\pi/m}{\operatorname{sen}(\pi/m)}.$ Sugestão: considere o integral $\int_C \frac{dz}{z^m+1}\, dz$, onde C é o caminho constituido pelos raios (do círculo $|z| \le 1$) $\arg z = 0$ e $\arg z = 2\pi/m$ e pelo arco da circunferência $|z| = 1$ que os liga.

3. Seja f uma função meromorfa, com polos em $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Mostre que:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

onde γ é um caminho simples, fechado, percorrido uma vez no sentido inverso e contendo $\{z_1, z_2, \ldots z_n\}$ no seu interior. Nota: isto prova que $\operatorname{Res}\big(f(z), \infty\big) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$.

4. Encontre todas as funções harmónicas, $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, da forma:

$$u(x, y) = g(2x + y)$$

(onde g é uma função real de variável real). Para cada uma das funções que obteve, determine uma das suas harmónicas conjugadas.

5. Construa a função holomorfa $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, que verifica:

a) $\displaystyle u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2},$ $\displaystyle f(\pi) = \frac{1}{\pi}.$

b) $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2x,$ $f(1) = 0.$

6. Seja f uma função meromorfa, com polos em $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, e tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \oint_{|z|=n} f(z)\,\mathsf{cotg}\,(\pi z)\,dz = 0.$$

a) Admitindo que $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \notin \mathbb{Z}$, prove que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{n} \mathsf{Res}\big(f(z)\mathsf{cotg}\,(\pi z), \xi_k\big)$$

b) Admitindo que $\xi_1 = 0$ e $\xi_2, \ldots, \xi_n \notin \mathbb{Z}$, justifique que:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{n} \mathsf{Res}\big(f(z)\mathsf{cotg}\,(\pi z), \xi_k\big)$$

7. Aproveite os resultados do problema anterior para calcular a soma das seguintes séries reais:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2},$ com $a \notin \mathbb{Z}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2},$ com $a \neq 0$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$