Análise Matemática IV - A

$2^{\underline{o}}$ Semestre 2006/2007

Cursos: LMAC, LEFT, LEBM, LEA

Ficha de Problemas nº 7

1. Prove que transformação $z \mapsto az + b$ transforma circunferências em circunferências e rectas em rectas.

2. **a)** Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Mostre que a equação da recta $ax + by + c = 0$, pode ser escrita na forma $\alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z + \beta = 0$, com $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

b) Mostre que a aplicação $z \mapsto \frac{1}{z}$ transforma rectas e circunferências em rectas <u>ou</u> circunferências.

Sugestão: que curvas descreve a equação $r(x^2 + y^2) + ax + by + c = 0$?

3. Calcule as imagens das regiões $R \subset \mathbb{C}$ pelas transformações f, dadas por:

a) $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \;\; f(z) = \frac{z-1}{iz+1}$

b) $R = \{x + iy \in \mathbb{C} : -1 < x < 1 \text{ e } 0 < y < \pi\}, \;\; f(z) = e^z$

c) $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 8 \text{ e; } \operatorname{Im} z > 0\}, \;\; f(z) = \log \sqrt[3]{z}$.

4. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias:

a) $\dfrac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$

b) $\phi' = \phi + \operatorname{sen} t$

c) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x-1)e^x$

d) $\dfrac{dy}{dt} = y\left(\dfrac{1}{t} - \operatorname{tg} t\right) + t\cos t$

e) $(1 + y^2)\dfrac{dx}{dy} = \operatorname{arctg} y - x$

5. Determine as soluções dos seguintes problemas de Cauchy:

a) $\dfrac{dv}{du} + \dfrac{2u}{1+u^2}v = \dfrac{1}{1+u^2}, \; v(0) = 1.$

b) $\begin{cases} x' + h(t)x - t = 0 \\ x(-1) = 2 \end{cases} \quad \text{com} \quad h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \\ t & \text{se} \quad t \geq 0 \end{cases}$

6. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais:

a) $x' = \dfrac{2}{t^2 - 1}$

b) $x^3 + (y+1)^2\dfrac{dy}{dt} = 0$

c) $\varphi' = te^{\varphi - t^2}$

d) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$

7. Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y^n + b(x)y = 0,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e a, b são funções reais de variável real.

a) Mostre que a mudança de variável $v = y^{n-1}$ transforma esta equação numa equação diferencial linear.

b) Use a mudança de variável da alínea anterior para resolver o problema de valor inicial $2x\frac{dy}{dx} + 2xy^5 - y = 0$, $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de solução.