Análise Matemática IV - A

$2^{\underline{o}}$ Semestre 2006/2007

Cursos: LMAC, LEFT, LEBM, LEA

Ficha de Problemas nº 8

1. Mostre que o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t^2 y^{1/3}, \quad y(0) = 0$$

tem uma infinidade de soluções.

2. a) Considere o problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right), \quad y(t_0) = y_0$$

onde f é contínua numa vizinhança de (t_0, y_0). Encontre uma mudança de variável que a transforme a equação diferenciável numa equação separável numa vizinhança de (t_0, y_0).

b) Determine a solução da equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + 4y^2}{4ty}, \quad t > 0$$

que verifica a condição inicial y(1) = 2 e indique o intervalo máximo de solução.

3. Resolva o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0 \\ \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

4. Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + (y^3 - \log x)\frac{dy}{dx} = 0, \quad x > 0 \tag{1}$$

a) Verifique que a equação (1) tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ e determine-o.

b) Prove que as soluções de (1) são dadas implicitamente por $\Phi(x, y) = C$, com $C \in \mathbb{R}$ e $\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\log x$, para qualquer $x > 0$

c) Determine a solução da equação que satisfaz a condição inicial $y(1) = \sqrt{2}$

5. Resolva os seguintes problemas de valor inicial, reduzindo as equações diferenciais indicadas a equações exactas por multiplicação por um factor integrante que dependa apenas de uma das variáveis. Determine também os intervalos máximos das soluções que determinar.

a) $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{y}{4y^2 + 2x}$, $y(1) = 1$.

b) $\dfrac{x}{t} - \operatorname{sen} t + \dfrac{dx}{dt} = 0$, $x(\pi) = 1$

c) $y^2 \left(\dfrac{1}{x} + \log x \right) + 2y \log x \, \dfrac{dy}{dx} = 0$, $y(e) = -1$

6. **a)** Determine em que condições uma equação da forma

$$M(t, y) + N(t, y)\frac{dy}{dt} = 0$$

admite um factor integrante que é função do produto ty, isto é, da forma $\mu = \mu(ty)$, e escreva uma equação diferencial ordinária que seja necessariamente satisfeita por μ.

b) Aproveite o resultado anterior para resolver o problema de valor inicial:

$$(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3) + (2x^3 + 3x^2y + 4xy^2)\frac{dy}{dx} = 0, \quad y(-1) = 1$$

c) Utilize o teorema da função implícita para determinar o polinómio de Taylor de segunda ordem da solução, em torno do ponto $t_0 = -1$.

7. **a)** Mostre que se $g(t)$ e $f(y)$ são contínuas em intervalos abertos I_1 e I_2, respectivamente, então a equação separável $f(y)\dfrac{dy}{dt} = g(t)$ é exacta para todo o $t \in I_1$ e $y \in I_2$. Determine um potencial para a equação.

b) Mostre que se $a(t)$ e $b(t)$ são contínuas num intervalo aberto, I, então a multiplicação de ambos os membros da equação linear $y' + a(t)y = b(t)$ pelo seu factor integrante a reduz a uma equação exacta em I. Determine um potencial para esta última.