Análise Matemática IV - A

$2^{\underline{o}}$ Semestre 2006/2007

Cursos: LMAC, LEFT, LEBM, LEA

Ficha de Problemas nº 9

1. Para cada uma das seguintes equações, esboce o campo de direcções e trace um conjunto de soluções que represente todos os possíveis tipos de comportamento qualitativo das mesmas.

a) $y' = \dfrac{ty}{1+t^2}$ **b)** $y' = (2+y)(y-1)$

c) $y' = y(1-y^2)$ **d)** $y' = \dfrac{y+t}{y-t}$

2. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Fixe $0 < r < 1$ e defina, para qualquer $x \in C[t_0 - r, t_0 + r]$:

$$Tx(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} x(s)\, ds$$

a) Prove que T tem um e um só ponto fixo em $C[t_0 - r, t_0 + r]$.

b) Se x é o ponto fixo referido, será que $x(t) = y_0\, e^{t-t_0}$ para qualquer $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$? Porquê?

3. Em que domínios as seguintes funções são localmente lipshitzianas relativamente a y? Justifique a sua resposta.

a) $f(t,y) = 1 + y^2$.

b) $f(t,y) = \sqrt{y^2 + t^2}$.

c) $f(t, y_1, y_2) = \dfrac{y_1}{1 + y_2^2}$

d) $f(t,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos y}{y^2} & \text{se} \quad y \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad y = 0 \end{cases}$

4. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y^{1/4} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tem uma infinidade de soluções, e explique por que esse facto não contradiz o Teorema de Picard.

5. Considere o problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} (1-t)y^3\dfrac{dy}{dt} = 1 - y^4 \\ \\ y(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2} \end{cases}$$

a) Determine uma solução do PVI e justifique que essa é a única solução do mesmo definida para t numa vizinhança de $1/2$.

b) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em $\mathbb{R}$.

c) Justifique por que o facto anterior não contradiz o teorema de Picard.

6. Considere uma função $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ contínua e que verifique, para certo $K > 0$:

$$0 \leq \varphi(t) \leq K\,(t+1)^{2/3} \quad \forall t \geq 0.$$

Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{3y^2 + \varphi(t)} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

tem uma única solução $y(t)$, definida para $t \in [0, \infty[$. Determine também $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.

Sugestão: comece por considerar o problema:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{3u^2} \\ \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

7. Seja $g(t)$ uma função contínua para $t \in]0, +\infty[$, e tal que $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = b$. Seja $a > 0$. Mostre que qualquer solução $y(t)$ de $y' + ay = g(t)$ satisfaz $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = b/a$.