Análise Matemática IV - A

2º Semestre 2006/2007

1º Teste — LMAC, LEFT, LEBM, LEA

21 de Abril de 2007

Duração: 1h 30min.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(2 val.) **1.** Sendo $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(0) = 1$ e:

$$f(x+iy) = e^{y^2-\alpha(x)}\cos 2xy + ie^{\beta(y)-x^2}\operatorname{sen} 2xy \qquad \text{para todos os } x, y \in \mathbb{R},$$

a) Verifique que se f é holomorfa em $\mathbb{C}$, então tem-se necessariamente $f(z) = e^{-z^2}$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

b) Determine $\dfrac{d^n f}{dz^n}(0)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(2 val.) **2.** Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)} + e^{\frac{1}{z-1}}$$

a) Obtenha a série de Laurent de f convergente para $1 < |z-1| < 2$.

b) Determine o valor de

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)^3}\,dz,$$

onde $\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 3/2\}$ e $\oint_\gamma \frac{1}{z-1}\,dz = -6\pi i$.

(2 val.) **3.** Calcule o integral

$$\oint_{|z-2|=2} \frac{z^5}{(z^6-1)(z+7)}\,dz,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

(2 val.) **4.** Utilizando o teorema dos resíduos, calcule o integral impróprio:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2+4)(x-1)}\,dx$$

(2 val.) **5.** O teorema de Liouville afirma que uma função f holomorfa em $\mathbb{C}$ e limitada é constante. Demonstre este teorema por via do cálculo do integral:

$$\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz,$$

onde $a, b \in \mathbb{C}$ e $R > 0$ é tal que $D(0,R) \supset \{a, b\}$.