Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV - A

2º Semestre 2006/2007

1º Teste — LMAC, LEFT, LEBM, LEA

21 de Abril de 2007

Resolução

1. Considere a função $f \in H(\mathbb{C})$ tal que $f(0) = 0$ e:

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Determine $f(z)$, para todo o $z \in \mathbb{C}$.

Dado que $f \in H(\mathbb{C})$, $u(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y$ e $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. Assim:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\operatorname{sen} x \operatorname{sh} y \quad \Rightarrow \quad v(x,y) = \cos x \operatorname{sh} y + \varphi(x),$$

e, ainda

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch} y \quad \Rightarrow \quad \cos x \operatorname{ch} y + \varphi(x) = \cos x \operatorname{ch} y \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = C.$$

Atendendo a que $f(0) = 0$, temos então:

$$0 = u(0,0) + iv(0,0) = C$$

Resulta assim que, para qualquer $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(x+iy) &= \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \\
&= \frac{(e^{ix} - e^{-ix})(e^{y} + e^{-y})}{4i} + \frac{(e^{ix} + e^{-ix})(e^{y} - e^{-y})}{4} \\
&= \frac{1}{4i}\left(e^{-y+ix} - e^{y-ix} - e^{y-ix} + e^{-y+ix}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{x+iy} - e^{-i(x+iy)}\right) \\
&= \operatorname{sen}(x+iy)
\end{aligned}$$

b) Qual o valor de $\dfrac{d^n f}{dz^n}(0)$, com $n \in \mathbb{N}$?

Atendendo a que, para todo o $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \text{sen}\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1},$$

o teorema de Taylor garante que:

$$f^{(2n+1)}(z) = (-1)^n \qquad \text{e} \qquad f^{(2n)}(z) = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alternativamente, poder-se-ia calcular $f^{(n)}(z)$ directamente a partir de $u(x,y)$ e $v(x,y)$ recorrendo ao teorema de Cauchy-Riemann:

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^n f}{dz^n} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + \frac{\partial^n v}{\partial x^n}$$

(será conveniente tratar separadamente os casos n par e n ímpar).

2. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)} + e^{\frac{1}{z-1}}$$

a) Obtenha a série de Laurent de f convergente para $1 < |z-1| < 2$ e uniformemente convergente em $\{z \in \mathbb{C} : 1+\epsilon \leq |z-1| \leq 2-\epsilon\}$, para qualquer $\epsilon > 0$.

A primeira parcela de $f(z)$ pode-se escrever:

$$\frac{1}{z(z^2-1)} = \frac{1}{z-1}\,\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\} :$$

Tem-se:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+z-1} = \frac{1}{z-1}\,\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}$$

A série converge para $\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1$, ou seja, $|z-1| > 1$. e converge uniformemente para:

$$\left|\frac{1}{z-1}\right| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad |z-1| \geq \frac{1}{r} \stackrel{\text{def}}{=} 1+\epsilon, \qquad \text{com} \qquad r < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon > 0.$$

Por outro lado:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+z-1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{2^{n+1}}\,.$$

A série converge para $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$, ou seja, $|z-1| < 2$. e converge uniformemente para:

$$\left|\frac{z-1}{2}\right| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad |z-1| \leq 2r \stackrel{\text{def}}{=} 2-\epsilon, \qquad \text{com} \qquad r < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon > 0.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z^2-1)} &= \frac{1}{z-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{2^{n+1}}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-2}}{(z-1)^k} + \sum_{k=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+2}(z-1)^k}{2^{k+2}} \\
&= \frac{1/2}{z-1} - \frac{1}{4} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(z-1)^k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(z-1)^k}{2^{k+2}}
\end{aligned} \tag{1}$$

com convergência pontual para $1 < |z-1| < 2$ e convergência uniforme em qualquer região dada por

$$1+\epsilon \leq |z-1| \leq 2-\epsilon, \qquad \text{com} \quad \epsilon > 0. \tag{2}$$

Por outro lado

$$e^{\frac{1}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{(z-1)^n} = \frac{1}{z-1} + 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{(z-1)^n}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}, \tag{3}$$

com convergência uniforme em $\left|\frac{1}{z-1}\right| \leq R$, ou seja, $|z-1| \geq \frac{1}{R}$, para qualquer $R > 0$. Em particular, esta série converge uniformemente na região (2).
Combinando as expressões (1) e (3), obtém-se:

$$f(z) = \frac{3/2}{z-1} + \frac{3}{4} + \sum_{n=2}^{\infty}\left((-1)^n + \frac{1}{n!}\right)\frac{1}{(z-1)^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{2^{n+2}}$$

com convergência pontual em $1 < |z-1| < 2$ e uniforme em qualquer região dada por (2).

b) Determine o valor de

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)^3}\,dz,$$

onde $\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 3/2\}$ e $\oint_\gamma \frac{1}{z-1}\,dz = -6\pi i$.

Como $\int_\gamma \frac{dz}{z-1} = -6\pi i$, $\text{Ind}_\gamma(1) = -3$. Como γ^* está contida na região de convergência da série de Laurent determinada na alínea anterior, pelo teorema de Laurent:

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)^3}\,dz = (-3)\,2\pi i\,a_2 == -6\pi i\frac{(-1)^2}{2^4} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

3. Calcule o integral

$$\oint_{|z-2|=2} \frac{z^5}{(z^6-1)(z+7)}\,dz,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

A função $f(z) = \frac{z^5}{(z^6-1)(z+7)}$ tem singularidades em em $z_k = e^{\frac{ik\pi}{3}}$, com $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ e em $z_6 = -7$. Destas, estão no interior do caminho $z_0 = 1$, $z_1 = e^{-\frac{i\pi}{3}}$ e $z_5 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$. Pelo teorema dos resíduos:

$$\oint_{|z-2|=2} \frac{z^5}{(z^6-1)(z+7)}\,dz = 2\pi i \left(\mathsf{Res}(f,1) + \mathsf{Res}\big(f, e^{-\frac{i\pi}{3}}\big) + \mathsf{Res}\big(f, e^{\frac{i\pi}{3}}\big)\right).$$

Todas as singularidades são polos simples da função:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \text{com} \quad \varphi(z) = \frac{z^5}{z+7} \quad \text{e} \quad \psi(z) = z^6 - 1,$$

em que $\psi(z_i) = 0$ e $\psi'(z_i) \neq 0$, para $i = 0, 1, 2$. Desta forma,

$$\mathsf{Res}(f, z_i) = \frac{\varphi(z_i)}{\psi'(z_i)} = \frac{\frac{z_i^5}{z_i+7}}{6z_i^5} = \frac{1}{6(z_i+7)},$$

pelo que:

$$\mathsf{Res}(f,1) = \frac{1}{48}$$

$$\mathsf{Res}\big(f, e^{-\frac{i\pi}{3}}\big) = \frac{1}{6(e^{-\frac{i\pi}{3}}+7)}$$

$$\mathsf{Res}\big(f, e^{\frac{i\pi}{3}}\big) = \frac{1}{6(e^{\frac{i\pi}{3}}+7)}$$

Resulta pois que:

$$\begin{aligned}
\oint_{|z-2|=2} \frac{z^5}{(z^6-1)(z+7)}\,dz &= 2\pi i \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{e^{-\frac{i\pi}{3}}+7} + \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{3}}+7}\right)\right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2\cos(\pi/3) + 14}{1 + 7 \cdot 2\cos(\pi/3) + 49}\right) \\
&= \frac{\pi i}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{15}{57}\right) = \frac{59\pi i}{456}
\end{aligned}$$

4. Utilizando o teorema dos resíduos, calcule o integral impróprio:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2+4)(x-1)}\,dx$$

Consideramos o caminho fechado $C = L^+ + \gamma_\epsilon + L^- + \Gamma_R$, onde γ_ϵ é a semicircunferência $|z-1| = \epsilon$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ percorrida no sentido inverso, Γ_R é a semicircunferência $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ percorrida no sentido directo e L^+, L^- os segmentos do eixo real (positivo e negativo, respectivamente) que unem Γ_R a γ_ϵ. Seja:

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z-1)}.$$

A única singularidade de f no interior de C é $z = 2i$. Assim, pelo teorema dos resíduos:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \mathsf{Res}(f, 2i).$$

A singularidade $z = 2i$ é um polo simples, e:

$$\mathsf{Res}(f, 2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{e^{iz}}{(z+2i)(z-1)} = \frac{e^{-2}}{4i(2i-1)} = \frac{-1-2i}{20ie^2}$$

Assim:

$$\int_{L^-+L^+} f(z)\,dz + \int_{\gamma_\epsilon} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{10e^2}(-1-2i) \tag{4}$$

Como $z = 1$ é um polo simples de f:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon} f(z)\,dz = -\pi i \mathsf{Res}(f, 1) = -\pi i \lim_{z\to 1}\frac{e^{iz}}{z^2+4} = -\pi i\frac{e^i}{5} = \frac{\pi}{5}(\mathsf{sen}\,1 - i\cos 1)$$

Por outro lado, e atendendo a que, para $|z| = R > 2$:

$$\left|\frac{1}{(z^2+4)(z-1)}\right| \leq \frac{1}{\big(|z^2|-4\big)\big(|z|-1\big)} = \frac{1}{(R^2-4)(R-1)} \to 0 \qquad \text{quando} \quad R\to\infty,$$

o lema de Jordan garante que:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0.$$

Tomando agora o limite quando $R \to \infty$ e $\epsilon \to 0$ na igualdade (4), obtém-se

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz + \frac{\pi}{5}(\mathsf{sen}\,1 - i\cos 1) = \frac{\pi}{10e^2}(-1-2i),$$

ou seja:

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \frac{\pi}{5}\left(\left(-\mathsf{sen}\,1 - \frac{1}{2e^2}\right) + i\left(\cos 1 - \frac{1}{e^2}\right)\right).$$

Finalmente:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathsf{sen}\,x}{(x^2+4)(x-1)}\,dx = \operatorname{Im}\left(\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z-1)}\,dz\right) = \frac{\pi}{5}\left(\cos 1 - \frac{1}{e^2}\right).$$

5. O teorema de Liouville afirma que uma função f holomorfa em $\mathbb{C}$ e limitada é constante. Demonstre este teorema por via do cálculo do integral:

$$\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz,$$

onde $a, b \in \mathbb{C}$ e $R > 0$ é tal que $D(0,R) \supset \{a, b\}$.

Sejam $a, b \in \mathbb{C}$, com $a \neq b$ e tomemos $R > 0$ tal que $|a| < R$ e $|b| < R$. Se ϵ fôr suficientemente pequeno (de facto, bastará tomar $\epsilon < |a-b|/2$), então, pelo teorema de Cauchy generalizado e fórmula integral de Cauchy:

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz &= \int_{|z-b|=\epsilon} \frac{f(z)/(z-a)}{(z-b)}\, dz + \int_{|z-a|=\epsilon} \frac{f(z)/(z-b)}{(z-a)}\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{f(b)}{b-a} + \frac{f(a)}{a-b}\right) \qquad (5) \\
&= \frac{f(b)-f(a)}{2\pi i(b-a)}.
\end{aligned}$$

Por hipótese, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$. Então, para $|z| = R$:

$$\left|\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\right| \leq \frac{M}{(|z|-|a|)(|z|-|b|)} = \frac{M}{(R-|a|)(R-|b|)},$$

pelo que:

$$\left|\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz\right| \leq \frac{M}{(R-|a|)(R-|b|)} \int_{|z|=R} |dz| = \frac{2\pi RM}{(R-|a|)(R-|b|)} \to 0.$$

quando $R \to \infty$. Desta forma, tomando o limite quando $R \to \infty$ na igualdade (5)

$$\frac{f(b)-f(a)}{2\pi i(b-a)} = 0.$$

Isto implica que $f(b) = f(a)$.