Equações Diferenciais Ordinárias
Notas Sobre as Aulas Teóricas

João Teixeira, Maria João Borges

1º Semestre de 2021/22

Índice

Capítulo 1

Equações Diferenciais Ordinárias

1.1 Introdução

1.1.1 Notação e Definições

Designa-se por *equação diferencial* uma relação de igualdade entre termos envolvendo uma função $y(x)$, as suas derivadas e a variável independente x. A equação poderá também depender de parâmetros não directamente relacionados com a variável independente x. É talvez mais simples pensar numa equação diferencial como uma equação cuja incógnita pertence a um *espaço de funções*

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \longmapsto y(x) = \Big(y_1(x), \ldots, y_m(x)\Big) \in \mathbb{R}^m$$

(pode-se ter $\mathbb{C}$ em vez de $\mathbb{R}$). Desta forma, $x_1, \ldots x_n$ são as variáveis independentes (e a dimensão do domínio de y, $n \in \mathbb{N}$, o seu número) e $y_1, \ldots, y_m$ as variáveis dependentes (e a dimensão do contradomínio de y, $m \in \mathbb{N}$, o seu número). Note que os (eventuais) parâmetros não são contados como variáveis independentes ou dependentes da equação.

As equações diferenciais dizem-se *ordinárias* se o domínio da função $y(x)$ está contido em $\mathbb{R}$, caso em que as derivadas que nela surgem são totais (em ordem a $x \in \mathbb{R}$). Dizem-se *parciais* se têm mais do que uma variável independente (o domínio de $y(x)$ está contido em $\mathbb{R}^n$) e envolvem derivadas parciais de y (em ordem a $x_1, x_2, \ldots$).

As equações diferenciais classificam-se como *escalares* ou *vectoriais* consoante tenham uma ou mais do que uma variável dependente (ou seja, o contradomínio de $y(x)$ está contido em $\mathbb{R}$ no caso escalar e $\mathbb{R}^m$ no caso vectorial). Neste último caso é costume considerar que a variável dependente é o vector $y(x) = \big(y_1(x), \ldots y_m(x)\big) \in \mathbb{R}^m$.

Por exemplo, a equação

$$\frac{dy}{dx} + 2ayx = 0$$

é ordinária, x é a variável independente e $y = y(x)$ a variável dependente, enquanto a é um parâmetro. Já a 2ª Lei de Newton para o movimento de uma partícula em $\mathbb{R}^3$

$$F(t, \mathbf{r}) = m\ddot{\mathbf{r}}, \tag{1.1}$$

é uma equação ordinária vectorial, pois $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Aqui utilizou-se a notação de Newton

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

para representar as 1ª e 2ª derivadas em ordem a t. A massa da partícula, m, é apenas um parâmetro.

Como exemplos de equações diferencias parciais escalares, podemos indicar a *equação de Laplace* num domínio bidimensional,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

(já introduzida na Análise Complexa), onde $u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; a *equação do calor* unidimensional,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde $u : \mathbb{R} \times [0, L] \to \mathbb{R}$; a *equação das ondas* unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde $u : \mathbb{R} \times [0, L] \to \mathbb{R}$. Também poderemos ter versões tridimensionais destas equações como, por exemplo, a equação do calor no espaço:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \stackrel{\text{def}}{=} k \, \nabla^2 u$$

onde $u = u(t, x, y, z)$, com $t \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$ e ∇^2 é o *operador laplaciano*.

Alguns problemas de equações diferencias parciais são de estudo muito difícil. Um dos mais conhecidos exemplos consiste nas equações de Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla) u = \nu \nabla^2 u + f(t, x)$$

$$\operatorname{div} u = 0$$

onde $u = u(t, x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$, com $t \in \mathbb{R}$, $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$. As suas soluções descrevem o campo de velocidade, u, de um fluído incompressível de viscosidade ν que ocupa o domínio D e está sujeito a uma força exterior f. Trata-se, pois, de uma equação diferencial parcial vectorial, que é bem conhecida pelas suas aplicações à hidrodinâmica e aerodinâmica. Para uma descrição de um problema em aberto relacionado com estas equações ver

`http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations`

Dedicaremos o que resta deste capítulo ao estudo das equações diferenciais ordinárias.

1.1.2 Ordem e Soluções de uma Equação Diferencial Ordinária

Uma equação diferencial (ordinária ou parcial) diz-se de ordem n se a maior ordem das derivadas das suas variáveis dependentes $y_1, \cdots y_m$ é n. Representamos o espaço vectorial das funções contínuas $y : I \to \mathbb{R}^m$ (com I um intervalo aberto) por $C(I, \mathbb{R}^m)$, que abreviaremos para $C(I)$. O espaço vectorial das funções contínuas e com derivadas contínuas até à ordem n será representado por $C^n(I, \mathbb{R}^m)$ ou, abreviadamente, $C^n(I)$. Assim:

$$C^n(I) = \left\{ y \in C(I) : y', y'', \cdots y^{(n)} \in C(I) \right\}$$

Uma função f é de classe C^n em I se e só se $f \in C^n(I)$.

Diz-se que uma função $y \in C^n(I)$, onde I é um intervalo aberto, é uma solução da equação diferencial (em I) se satisfaz a equação para qualquer $t \in I$, ou seja, se substituindo $y_1(t) \cdots y_n(t)$ na equação diferencial se obtém uma identidade, qualquer que seja $t \in I$.

Consideraremos equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem (escalares ou vectoriais) que podem ser explicitadas na forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

onde $f : I \times D$, e onde D é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Uma solução da equação (1) é uma função $y \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ tal que $y(t) \in D$ e $y'(t) = f(t, y(t))$ para qualquer $t \in I$.

Como veremos posteriormente, o estudo de alguns tipos de equações ordinárias de ordem n (escalares ou vectoriais) pode ser reduzido ao das equações vectoriais de 1ª ordem. Por exemplo, na 2ª Lei de Newton (1.1), introduzindo como variável dependente a *quantidade de movimento*, $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$, obtém-se a equação vectorial de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} & = & \dfrac{1}{m}\mathbf{p} \\ \\ \dot{\mathbf{p}} & = & F(t, \mathbf{r}) \end{cases}$$

1.1.3 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Como exemplo, escrevemos a mais simples equação diferencial de 1ª ordem, no caso escalar:

$$y' = g(t).$$

A solução geral desta equação, que se obtém por primitivação, é

$$y(t) = \int g(t)dt + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

estando bem definida em qualquer intervalo onde g é contínua. Note-se que existe uma infinidade de soluções para a equação diferencial; o mesmo se passa com qualquer equação diferencial ordinária de 1ª ordem, $y' = f(t, y)$, desde que f seja uma função contínua num conjunto aberto.

Acrescentando à equação de 1ª ordem uma *condição inicial*, obtém-se um *problema de valor inicial* (ou *problema de Cauchy*):

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Em certas condições (veremos isso mais tarde) um problema de valor inicial tem solução única.

O *intervalo máximo de solução*, I_{max}, do problema de valor inicial é o "maior intervalo" onde o problema (1.2) tem solução. Mais exactamente, I_{max} é o intervalo maximal de existência de solução [1].

[1] O intervalo I_{max} diz-se maximal no sentido em que existe uma solução de (1.2) em I_{max} e qualquer outro intervalo onde uma solução de (1.2) está definida está contido em I_{max}

1.2 Equações Escalares de Primeira Ordem

1.2.1 Determinação da Solução Geral

Muitos métodos de determinação da solução geral de equações diferenciais escalares de 1ª ordem baseiam-se na redução da equação a uma igualdade do tipo

$$\frac{d}{dt}\Big(G\big(t, y(t)\big)\Big) = g(t), \tag{1.3}$$

onde $G = G(t, y)$, $g = g(t)$ e a derivada no 1º membro da equação é uma derivada total em ordem a t. Por primitivação, a solução geral de (1.3), escrita na forma implícita, é:

$$G(t, y(t)) = \int g(t)dt + C$$

1.2.2 Equações Lineares

Uma equação escalar de primeira ordem diz-se *linear*, se pode ser escrita na forma

$$\dot{y} + a(t)y = b(t) \tag{1.4}$$

A equação diz-se homogénea se $b(t) \equiv 0$. Nesse caso (e se $y \neq 0$) ela é equivalente a

$$\frac{y'}{y} = -a(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\Big(\log|y|\Big) = -a(t)$$

Primitivando, obtém-se:

$$\begin{aligned} \log|y| = -\int a(t)dt + C \quad &\Leftrightarrow \quad |y| = e^C \exp\left(-\int a(t)dt\right) \\ &\Leftrightarrow \quad y(t) = \pm D \exp\left(-\int a(t)dt\right) \neq 0 \end{aligned}$$

onde $D = e^C > 0$. Fazendo $K = \pm D$ e notando que $y(t) \equiv 0$ também é solução de $y' = -a(t)y$, obtemos a solução geral da equação linear homogénea

$$y(t) = K \exp\left(-\int a(t)dt\right), \qquad t \in I$$

onde I é qualquer intervalo aberto onde $a(t)$ é contínua e $K \in \mathbb{R}$.

Resolvamos agora a equação não homogénea. Multiplicando a equação (1.4) por uma função $\mu(t)$ tal que $\dot{\mu} = a(t)\mu$, por exemplo, tomando

$$\mu(t) = \exp\left(\int a(t)dt\right)$$

obtém-se a equação equivalente [2]:

$$\mu(t)\dot{y} + \mu(t)a(t)y = \mu(t)b(t) \quad \Leftrightarrow \quad \mu\dot{y} + \dot{\mu}y = \mu(t)b(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(\mu y\Big) = \mu(t)b(t)$$

[2] As equações são equivalentes pois $\mu(t) = e^{\int a(t)dt} \neq 0$, para qualquer t

Assim, a solução geral de (1.4) é dada pela expressão:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\Big[\int \mu(t)b(t)dt + C\Big], \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Teorema: (Existência de solução de um PVI com equação linear)
Seja $I \subset \mathbb{R}$, a e b funções contínuas em I e $t_0 \in I$. Então, para qualquer $y_0 \in \mathbb{R}$, o PVI

$$\begin{cases} \dot{y} + a(t)y = b(t) \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite a solução única

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\Big[\int_{t_0}^{t} \mu(s)b(s)ds + \mu(t_0)y_0\Big],$$

definida para todo $t \in I$.

Exemplo

(1) Determinar a solução do seguinte problema de valor inicial, indicando o intervalo máximo de existência de solução:

$$\begin{cases} \dot{w} + w = e^{-2t} \\ w(0) = 3 \end{cases}$$

A equação $\dot{w} + w = e^{-2t}$ é linear, com $a(t) = 1$ e $b(t) = e^{-2t}$ obviamente contínuas em $\mathbb{R}$. Um factor integrante (em $I = \mathbb{R}$) para a equação é:

$$\mu(t) = e^{\int dt} = e^{t}$$

Sendo assim

$$\dot{w} + w = e^{-2t} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}\Big(e^{t}w\Big) = e^{-t} \;\Leftrightarrow\; w(t) = e^{-t}(-e^{-t} + C)\ ,\ C \in \mathbb{R}$$

Dado que $w(0) = 3$ conclui-se que $C = 4$ e a solução do PVI é

$$w(t) = e^{-t}\left(4 - e^{-t}\right)$$

O intervalo máximo de solução corresponde ao maior intervalo onde $w(t)$ está bem definida e é continuamente diferenciável. Neste caso, $I_{max} = \mathbb{R}$. Note que solução está definida (e é continuamente diferenciável) em $I = \mathbb{R}$, pois $a(t)$ e $b(t)$ são contínuas em $\mathbb{R}$.

(2) Determinar a solução do (PVI)

$$2xyy' + (1+x)y^2 = 2e^{x} \quad , \quad x > 0 \text{ e } y(1) = 2$$

efectuando a mudança de variável $v = y^2$.
Tomando $v = y^2$ tem-se que $v' = (y^2)' = 2yy'$. Substituindo na equação

$$xv' + (1+x)v = 2e^{x} \quad \Leftrightarrow \quad v' + \Big(\frac{1}{x} + 1\Big)v = \frac{2e^{x}}{x}$$

Trata-se de uma equação linear, com $a(x) = \frac{1}{x} + 1$ e $b(x) = \frac{2e^x}{x}$ obviamente contínuas para $x > 0$. Um factor integrante para a equação é:

$$\mu(x) = e^{\int \left(\frac{1}{x}+1\right) dx} = xe^x$$

Sendo assim

$$v' + \left(\frac{1}{x} + 1\right)v = \frac{2e^x}{x} \;\Leftrightarrow\; xe^x v' + (1+x)e^x v = 2e^{2x} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\left(xe^x v\right) = 2e^{2x}$$

pelo que

$$v(x) = \frac{e^{2x} + c}{xe^x} \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dado que $v = y^2$, tem-se que

$$y(x) = \sqrt{\frac{e^{2x} + c}{xe^x}} \quad \text{ou} \quad y(x) = -\sqrt{\frac{e^{2x} + c}{xe^x}}$$

tendo-se o primeiro caso se a condição inicial for positiva e o segundo se a condição inicial for negativa. Assim e dado que $y(1) = 2 > 0$, tem-se que a solução do (PVI) é

$$y(x) = \sqrt{\frac{e^{2x} + 4e - e^2}{xe^x}}$$

Como $e^{2x} + 4e - e^2$ é sempre positivo e $xe^x > 0$ se e só se $x > 0$, então

$$\frac{e^{2x} + 4e - e^2}{xe^x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Além disso, o valor inicial $x_0 = 1$ é positivo. Assim, $I_{max} =]0, +\infty[$.

1.2.3 Equações Separáveis

Uma equação escalar de primeira ordem, diz-se *separável* se pode ser escrita na forma

$$f(y)\frac{dy}{dt} = g(t) \tag{1.5}$$

Para se poder encontrar a sua solução geral, é necessário que f e g estejam definidas e sejam contínuas em subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$.

Se $F(y) = \int f(y)dy$ então:

$$\frac{d}{dt}F(y) = F'(y)\frac{dy}{dt} = f(y)\frac{dy}{dt} = g(t).$$

Em consequência, a solução geral da equação (1.5) é dada implicitamente por

$$\int f(y)dy = \int g(t)dt + C$$

Note que a equação anterior é da forma

$$\Phi(t, y) = C \qquad \text{onde} \quad \Phi(t, y) = F(y) - \int g(t)dt$$

Considere-se uma condição inicial genérica, $y(t_0) = y_0$. Se C for escolhido por forma a que (t_0, y_0) verifique a equação implícita, isto é, $C = \Phi(t_0, y_0)$, então o gráfico da solução do PVI é uma curva de nível da função $\Phi(t, y)$. Para ser possível definir uma função $S(t)$ tal que $y = S(t)$ seja a única solução da equação implícita numa vizinhança de t_0, isto é, para que, para (t, y) numa vizinhança de (t_0, y_0),

$$\Phi(t, y) = C \qquad \Leftrightarrow \qquad y = S(t)$$

então é obviamente necessário que a equação $\Phi(t, y) = C$ tenha uma e uma só solução pois, caso contrário, não se pode definir a função $S(t)$. Neste caso, $S(t)$ diz-se uma solução explícita (local) de $\Phi(t, y) = C$. Para poder concluir da existência de solução explícita local da equação, é útil o seguinte teorema:

Teorema da função implícita (em $\mathbb{R}^2$):
Seja $G : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(t_0, y_0) \in D$, $G(t_0, y_0) = 0$ e

$$\frac{\partial G}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0.$$

Então a equação

$$G(t, y) = 0$$

define uma única função y de classe C^1 numa vizinhança de t_0 tal que $y(t_0) = y_0$ e:

$$G(t, y(t)) = 0$$

para t nessa vizinhança.

No caso presente, temos $G(t, y) = \Phi(t, y) - C$, pelo que:

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\Phi - C\big)(t_0, y_0) = F'(y_0) = f(y_0).$$

Consequentemente, basta verificar que $f(y_0) \neq 0$ para garantir a existência de solução explícita do PVI numa vizinhança de t_0.

Teorema: (Existência de solução (local) do PVI para a equação separável)
Sejam f e g funções reais de variável real contínuas em vizinhanças de y_0 e t_0 respectivamente. Se $f(y_0) \neq 0$, então o PVI

$$\begin{cases} f(y)\dfrac{dy}{dt} = g(t) \\[2ex] y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite solução única definida numa vizinhança de t_0. A solução é definida implicitamente pela equação

$$\int_{y_0}^{y} f(u)du = \int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

ou, equivalentemente,

$$\int f(y)dy - \int g(t)dt = C,$$

com C determinado pela condição inicial $y(t_0) = y_0$.

Exemplo

(1) Determinar a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y(x-3) \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

Para determinar soluções tais que $y(t) \neq 0$, para qualquer t:

$$\frac{dy}{dx} = y(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x-3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\int \frac{1}{y}\,dy = x-3 \quad \Leftrightarrow \quad \log|y| = \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

pelo que a solução geral da equação é dada por

$$y(x) = Ke^{\frac{x^2}{2}-3x}, \qquad \text{com} \quad K \in \mathbb{R}$$

(Note que $y(t) \equiv 0$ também é solução da equação diferencial). Atendendo a que $y(0) = 5$ tem-se que $K = 5$ e como tal a solução do PVI é

$$y(x) = 5e^{\frac{x^2}{2}-3x}$$

O domínio de diferenciabilidade da função y é $\mathbb{R}$, pelo que o intervalo máximo de existência de solução é $I_{\max} = \mathbb{R}$. (Observe-se também que $y(t) \neq 0$, para todo o $t \in \mathbb{R}$, pelo que as equivalências acima são sempre válidas).

(2) Determinar a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -3y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Note-se em primeiro lugar que a equação $\frac{dy}{dx} = -3y$ admite a solução de equilíbrio (ou constante) $y(x) \equiv 0$, mas esta solução só verifica a condição inicial no caso em que $y_0 = 0$. Para determinar soluções não constantes,

$$\frac{dy}{dx} = -3y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\int \frac{1}{y}\,dy = -3 \quad \Leftrightarrow \quad \log|y| = -3x + C$$

pelo que a solução geral da equação é dada por

$$y(x) = Ke^{-3x}$$

Atendendo a que $y(0) = y_0$ tem-se que $K = y_0$ e como tal a solução do PVI é

$$y(x) = y_0 e^{-3x}$$

Na Figura 1.1 encontra-se o traçado de algumas destas soluções. Note-se, em particular, que a solução constante, $y(x) \equiv 0$, tem a seguinte propriedade:

1. Todas as outras soluções se aproximam de $y(x) \equiv 0$ quando $x \to +\infty$.
2. Todas as outras soluções se afastam de $y(x) \equiv 0$ quando $x \to -\infty$.

Devido à propriedade 1, dizemos que a solução $y(x) \equiv 0$ é assimptoticamente estável quando $x \to +\infty$.

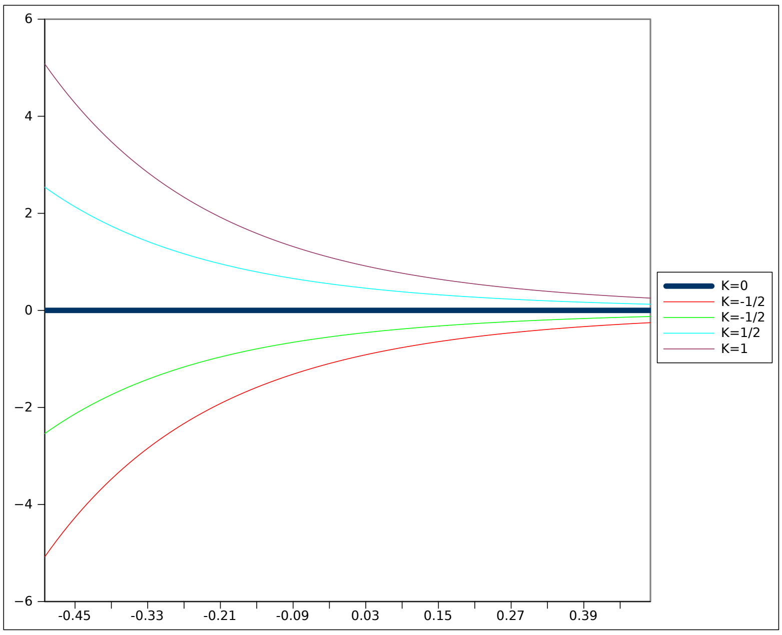

Figura 1.1: A solução de equilíbrio $y(t) \equiv 0$ e as soluções correspondentes a $y_0 = \pm 1/2$, $y_0 = \pm 1$..

1.2.4 Equações Exactas

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $M, N : A \to \mathbb{R}$. Uma equação diferencial do tipo

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{1.6}$$

diz-se exacta se e só se é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\Big(\phi(t,y)\Big) = 0, \tag{1.7}$$

onde $\phi : A \to \mathbb{R}$ é de classe C^1.

A solução geral, na forma implícita, da equação exacta é, então:

$$\phi(t,y) = C, \qquad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Em que condições existe uma tal função ϕ, de forma a que a equação (1.6) seja equivalente a (1.7)? Começamos por notar que a equação (1.7) se pode escrever:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 \tag{1.8}$$

Comparando a equação (1.6) com (1.8), concluímos que para (1.6) ser exacta é necessário e suficiente que:

$$M = \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad \text{e} \qquad N = \frac{\partial \phi}{\partial y}\,,$$

ou seja, $(M, N) = \nabla\phi$, para certa função $\phi \in C^1(A, \mathbb{R})$. Isto é equivalente a dizer que o campo (M, N) é um campo gradiente [3].

Exemplo: as equações separáveis que, como vimos, se podem escrever na forma

$$-g(t) + f(y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

onde $g : A \to \mathbb{R}$ e $f : B \to \mathbb{R}$ são funções contínuas [4], são também exactas. De facto, basta tomar um potencial $\phi : A \times B \to \mathbb{R}$ dado por:

$$\phi(t, y) = \int f(y)dy - \int g(t)dt.$$

Este exemplo não parece muito interessante, pois obtivémos o potencial a partir do conhecimento prévio da solução geral da equação separável.

Problemas mais interessantes – no sentido em que não podem ser facilmente resolvidos por outros métodos – podem-se abordar tomando como ponto de partida a seguinte (e já vossa conhecida) condição necessária para que um campo seja gradiente.

Proposição: se $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto e simplesmente conexo, $M, N : A \to \mathbb{R}$ são de classe C^1 e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \qquad \text{em } A$$

então existe $\phi : A \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $(M, N) = \nabla\phi$. Em particular, isto implica que a equação $M(t, y) + N(t, y)y' = 0$ é exacta.

Considerando agora um problema de valor inicial de uma equação exacta (1.7) com condição inicial $y(t_0) = y_0$, a sua solução geral é:

$$\phi(t, y) = C, \qquad \text{com } C = \phi(t_0, y_0)$$

O teorema da função implícita garante a existência de solução local desde que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\Phi - C)(t_0, y_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t_0, y_0) = N(t_0, y_0) \neq 0.$$

Teorema:(Existência de solução (local) do PVI para a equação exacta). Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e simplesmente conexo e $M, N : A \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Se

a) $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$ em A,

b) $N(t_0, y_0) \neq 0$,

[3] $(M, N) : A \to \mathbb{R}$ é um campo gradiente com um potencial $\phi \in C^1(A, \mathbb{R})$.
[4] $A, B \subset \mathbb{R}$ são conjuntos abertos

então existe $\phi : A \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que [5].

$$\phi(t,y) = C, \qquad \text{com } C = \phi(t_0, y_0)$$

define implicitamente a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} M(t,y) + N(t,y)\dfrac{dy}{dt} = 0 \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

para t numa vizinhança de t_0.

Exemplo

(1) Determinar a solução geral da equação

$$e^{4x} + 2xy^2 + (\cos y + 2x^2 y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Sendo

$$M(x,y) = e^{4x} + 2xy^2 \qquad \text{e} \qquad N(x,y) = \cos y + 2x^2 y$$

é fácil de verificar que

(i) M e N são continuamente diferenciáveis em $U = \mathbb{R}^2$;

(ii) $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 4xy = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Conclui-se que (M,N) é um campo gradiente em $\mathbb{R}^2$, isto é, existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\Phi = (M,N)$.

Cálculo de Φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = M \;\Rightarrow\; \Phi(x,y) = \int (e^{4x} + 2xy^2)\,dx + C(y) \;\Rightarrow\; \Phi(x,y) = \frac{e^{4x}}{4} + x^2y^2 + C(y)$$

e, por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N \;\Rightarrow\; 2x^2y + C'(y) = \cos y + 2x^2 y \;\Rightarrow\; C(y) = \operatorname{sen} y + D$$

pelo que

$$\Phi(x,y) = \frac{e^{4x}}{4} + x^2y^2 + \operatorname{sen} y + D \;\;,\;\; D \in \mathbb{R}$$

Resolução da equação

Nestas circunstâncias [6]

$$e^{4x} + 2xy^2 + (\cos y + 2x^2y)\frac{dy}{dx} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\Big(\frac{e^{4x}}{4} + x^2y^2 + \operatorname{sen} y\Big) = 0$$

pelo que a solução geral da equação é definida implicitamente por

$$\frac{e^{4x}}{4} + x^2y^2 + \operatorname{sen} y = K \;\;,\;\; K \in \mathbb{R}$$

[5] De facto, as hipóteses garantem que ϕ é de classe C^2; mas esta conclusão mais forte não é necessária para o que iremos fazer.

[6] Note que precisamos apenas de um $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\Phi = (M,N)$. Qualquer um destes potênciais, em particular o que se obtém com $C = 0$, pode ser usado para resolver a equação exacta.

1.2.5 Equações Redutíveis a Exactas

Qualquer equação escalar de primeira ordem é *redutível a exacta*, ou seja, pode ser transformada numa equação exacta, multiplicando-a por uma função $\mu(t, y)$ apropriada. A função μ denomina-se por um *factor integrante* da equação, e pode ser calculado resolvendo a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$$

No geral pode ser impraticável obter uma solução explícita para esta equação. Contudo, ela pode ser facilmente resolvida nos casos em que existe um factor integrante, μ, que depende apenas de uma variável.

- A equação diferencial

  $$M(t, y) + N(t, y)\frac{dy}{dt} = 0$$

  é redutível a exacta, com factor integrante só dependendo de t, $\mu = \mu(t)$, se a função

  $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$$

  depender apenas de t. Se esta condição se verificar, o factor integrante é uma das soluções da equação diferencial

  $$\dot{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}\mu$$

- A equação diferencial

  $$M(t, y) + N(t, y)\frac{dy}{dt} = 0$$

  é redutível a exacta, com factor integrante só dependendo de y, $\mu = \mu(y)$, se a função

  $$\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

  depender apenas de y. Se esta condição se verificar, o factor integrante é uma das soluções da equação diferencial

  $$\dot{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\mu$$

Em qualquer dos casos, a solução da equação inicial será dada por

$$\Phi(t, y) = C$$

em que Φ satisfaz

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mu M \qquad , \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mu N$$

Exemplos:

1. Considere a equação diferencial

$$3x^2y + 2xy + y^3 + (x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

Sendo

$$M(x, y) = 3x^2y + 2xy + y^3 \qquad , \qquad N(x.y) = x^2 + y^2$$

é fácil de concluir que M e N têm derivada contínua em $\mathbb{R}^2$ (são funções polinomiais) e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2x + 3y^2 \qquad , \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

pelo que a equação não é exacta. Admitindo que é redutível a exacta, existe um factor integrante μ tal que a equação

$$(3x^2y + 2xy + y^3)\mu + (x^2 + y^2)\mu\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta. A equação que o factor integrante satisfaz é:

$$(3x^2y + 2xy + y^3)\frac{\partial \mu}{\partial y} + (3x^2 + 2x + 3y^2)\mu = (x^2 + y^2)\frac{\partial \mu}{\partial x} + 2x\mu$$

Supondo que $\mu = \mu(x)$ (o que implica $\partial\mu/\partial y = 0$ e $\partial\mu/\partial x = \mu'(x)$) tem-se que

$$(3x^2 + 2x + 3y^2)\mu = (x^2 + y^2)\mu'(x) + 2x\mu \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{3x^2 + 2x + 3y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 3$$

Note que a equação $\mu'(x)/\mu(x) = 3$ é equivalente à equação do factor integrante com a hipótese adicional $\mu = \mu(x)$. Ela pode obviamente ser resolvida, pois o segundo membro **não depende de** y, dando como solução o factor integrante $\mu(x) = e^{3x}$.

Considere-se então a equação (equivalente à original)

$$e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3) + e^{3x}(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = 0,$$

que, por construção, é exacta. Podemos novamente verificar esse facto observando que as funções $e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3)$ e $e^{3x}(x^2 + y^2)$ são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$ e:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{3x}(x^2 + y^2)\right]$$

Sendo assim $(\mu M, \mu N)$ é um campo gradiente em $\mathbb{R}^2$, isto é, existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\Phi = (\mu M, \mu N)$.

<u>Cálculo de Φ</u>

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mu N \quad \Rightarrow \quad \Phi(x, y) = \int e^{3x}(x^2 + y^2)\, dy + C(x)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(x, y) = e^{3x}\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + C(x)$$

e, por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \mu M \quad \Rightarrow \quad 3e^{3x}\left(x^2 y + \tfrac{y^3}{3}\right) + 2xye^{3x} + C'(x) = e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3) \quad \Rightarrow \quad C(x) = K$$

pelo que

$$\Phi(x,y) = e^{3x}\left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right) + K \;, \quad K \in \mathbb{R}$$

<u>Resolução da equação</u>
Nestas circunstâncias

$$3x^2y + 2xy + y^3 + (x^2+y^2)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3) + e^{3x}(x^2+y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[e^{3x}\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\right] = 0$$

pelo que a solução geral da equação é definida implicitamente por

$$e^{3x}\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) = k \;\;,\;\; k \in \mathbb{R}.$$

2. Considere a equação diferencial

$$y + (2xy - e^{-2y})\frac{dy}{dx} = 0$$

Sendo

$$M(x,y) = y \qquad , \qquad N(x.y) = 2xy - e^{-2y}$$

é fácil de concluir que M e N têm derivada contínua em $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad , \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

pelo que a equação não é exacta. Admitindo que é redutível a exacta, existe um factor integrante μ tal que a equação

$$y\mu + (2xy - e^{-2y})\mu\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta. Pelo que

$$y\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu = (2xy - e^{-2y})\frac{\partial \mu}{\partial x} + 2y\mu$$

Supondo que $\mu = \mu(x)$ (o que implica $\partial\mu/\partial y = 0$ e $\partial\mu/\partial x = \mu'(x)$) tem-se que

$$\mu = (2xy - e^{-2y})\mu'(x) + 2y\mu \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{1-2y}{2xy - e^{-2y}}$$

Como se vê, a função $\dfrac{1-2y}{2xy-e^{-2y}}$ não depende apenas da variável x, pelo que **não existe** factor de integração dependendo apenas de x.

Supondo agora que $\mu = \mu(y)$ (o que implica $\partial\mu/\partial x = 0$ e $\partial\mu/\partial y = \mu'(y)$) tem-se que

$$y\mu' + \mu = 2y\mu \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{2y-1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = 2 - \frac{1}{y}$$

Neste caso a equação anterior pode ser resolvida pois o segundo membro **depende** apenas de y. Como tal, o factor integrante é uma das suas soluções não nulas, por exemplo, $\mu(y) = \dfrac{e^{2y}}{y}$. Considere-se então a equação

$$e^{2y} + \left(2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

que, tendo sido obtida por multiplicação de ambos os membros da equação original pelo factor integrante, é necessariamente exacta. Para confirmar este facto, observe-se que as funções e^{2y} e $2xe^{2y} - \frac{1}{y}$ são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$, e

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[e^{2y}\Big] = 2e^{2y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[2xe^{2y} - \frac{1}{y}\Big]$$

Sendo assim $(\mu M, \mu N)$ é um campo gradiente em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ (ou em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$), isto é, existe $\Phi : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \to \mathbb{R}$ (ou $\Phi : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \to \mathbb{R}$) tal que $\nabla\Phi = (\mu M, \mu N)$.

<u>Cálculo de Φ</u>

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = M\mu \quad \Rightarrow \quad \Phi(x,y) = \int e^{2y}\,dx + C(y) \quad \Rightarrow \quad \Phi(x,y) = xe^{2y} + C(y)$$

e, por outro lado

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \mu N \quad \Rightarrow \quad 2xe^{2y} + C'(y) = 2xe^{2y} - \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad C(y) = -\log|y| + \text{const.}$$

pelo que

$$\Phi(x,y) = xe^{2y} - \log|y| + \text{const.} \quad , \quad \text{const.} \in \mathbb{R}$$

<u>Resolução da equação</u>

Nestas circunstâncias, para $y > 0$ ou $y < 0$:

$$y + (2xy - e^{-2y})\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2y} + (2xe^{2y} - \frac{1}{y})\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(xe^{2y} - \log|y| + \text{const.}\Big) = 0$$

pelo que a solução geral da equação é definida implicitamente por

$$xe^{2y} - \log|y| = k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

1.3 Existência, Unicidade e Prolongamento de Soluções

Consideramos o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

onde a função $f : D \to \mathbb{R}$ tem domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. É costume designar $f(t,y)$ por *campo de direcções* da equação diferencial em (1.9); isto deriva do facto de **a recta tangente ao gráfico das soluções da equação diferencial** ter, em cada ponto (t,y) desse gráfico, **declive igual a** $f(t,y)$. Note que se $y(t)$ é solução da equação diferencial então $f(t,y(t)) = \frac{dy}{dt}(t)$.

Nesta secção estudamos as condições que a função $f(t,y)$ deve verificar para que a solução do PVI:

- exista;
- seja única;
- esteja definida num intervalo maximal $I =]a,b[$.

Estas questões matemáticas são muito importantes do ponto de vista das aplicações. Os métodos numéricos que na prática são aplicados no cálculo aproximado de soluções de uma equação diferencial ordinária exigem, como hipótese, que a solução do PVI exista, seja única e que dependa continuamente das condições iniciais — isto é, que seja um *problema bem posto*. É sabido que quando um PVI falha uma daquelas propriedades as soluções dos esquemas numéricos correspondentes podem exibir comportamentos que as tornam inúteis, na óptica das aplicações.

1.3.1 Teorema de Peano

Se exigirmos apenas continuidade de $f(t,y)$, podemos provar o:

Teorema de Peano (Existência de solução local)

Considere-se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, e $f : D \to \mathbb{R}$, contínua em $(t,y) \in D$. Se $(t_0, y_0) \in D$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite pelo menos uma solução, $y(t)$, num intervalo $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ para certo $\alpha > 0$.

Pode-se então colocar a questão de saber se a continuidade de $f(t,y)$ é suficiente para provar unicidade de solução. A subsecção seguinte mostra que a resposta a esta questão é negativa.

1.3.2 Exemplo de Não Unicidade de Solução

Considere-se o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = |y|^{1/2} \\ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

Vamos construir um conjunto infinito de soluções para este PVI.

Começamos por notar que a solução constante $y(t) \equiv 0$ é solução do PVI. Por outro lado, admitindo que $y(t) > 0$, a equação pode ser escrita na forma

$$y^{-1/2}\frac{dy}{dt} = 1 \ \Leftrightarrow \ \frac{d}{dt}\Big(\int y^{-1/2}dy\Big) = 1 \ \Leftrightarrow \ 2y^{1/2} = t + c$$

Desta forma, para $t + c > 0 \Leftrightarrow t > -c$, a função

$$y(t) = \frac{1}{4}(t+c)^2$$

é continuamente diferenciável e satisfaz a equação diferencial para $t > -c$.

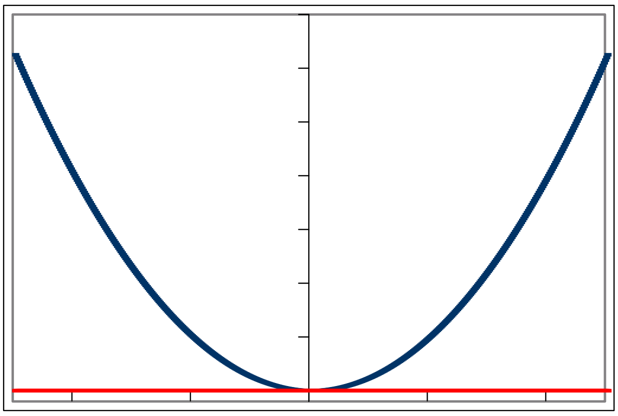

Figura 1.2: A solução de equilíbrio $y(t) \equiv 0$ e a solução $y(t) = t^2/4$.

Podemos agora utilizar o método de "cortar" e "colar" a partir das soluções $y(t) \equiv 0$ e $y(t) = \frac{1}{4}(t+c)^2$, para $t > -c$, para criar novas soluções do PVI. Será necessário, obviamente, que que no "ponto de colagem" a nova solução seja uma função contínua, diferenciável e que verifique a equação diferencial.

Para $t_1 > 0$, defina-se

$$y_{t_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \ \ t \leq t_1 \\ \\ \dfrac{1}{4}(t-t_1)^2 & \text{se} \ \ t > t_1 \end{cases}$$

Verifica-se que y_{t_1} é diferenciável e verifica a equação diferencial em $\mathbb{R}\backslash\{t_1\}$, pois foi construída à custa das soluções $y(t) \equiv 0$ e $y(t) = \frac{1}{4}(t+c)^2$, com $c = -t_1$. Note que esta escolha de c faz precisamente com que

$$\lim_{t \to t_1^-} y_{t_0}(t) = \lim_{t \to t_1^+} y_{t_1}(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = \left(\frac{t_1}{2} - k\right)^2 ,$$

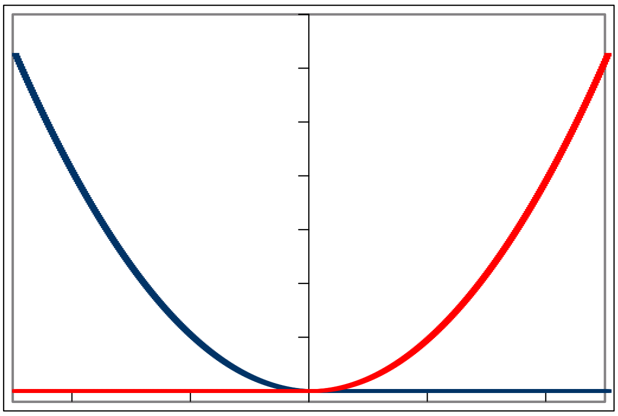

Figura 1.3: As soluções do PVI quando $c = 0$.

ou seja, que y_{t_1} seja contínua em t_1 e $y_{t_1}(t_1) = 0$. Também as derivadas laterais de y_{t_1} em t_1 existem e são nulas, pelo que y_{t_1} satisfaz a equação diferencial em t_1.

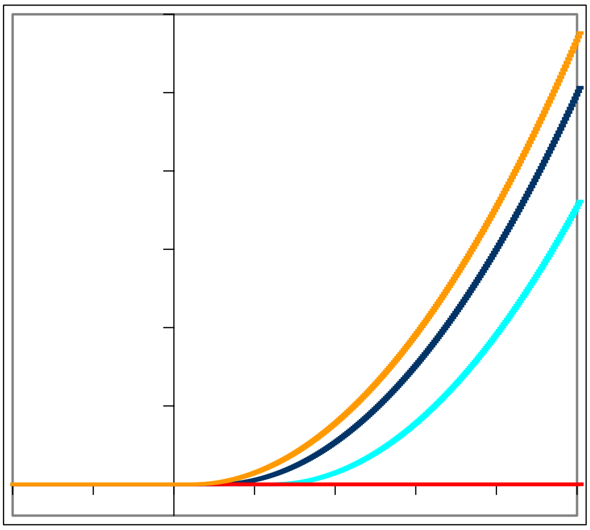

Figura 1.4: As soluções y_{t_1} com $t_1 = 1/5$, $t_1 = 1/2$ e $t_1 = 6/5$.

O facto de existir uma infinidade de soluções mostra que a continuidade da função $f(t,y) = \sqrt{y}$ no seu domínio não é suficiente para garantir unicidade de solução para o PVI.

De facto, temos que

$$|f(t,x) - f(t,y)| = \left|\frac{\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}}{x - y}\right| |x - y|,$$

onde o termo

$$\left|\frac{\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}}{x - y}\right|,$$

não é limitado para x e y num vizinhança qualquer da origem. Isto implica, em particular, que fixando $y = 0$ as taxas médias de crescimento da função f não são limitadas. Ora, foi precisamente nos pontos onde a solução da equação é nula que se observou a bifurcação de soluções!

1.3.3 Condição de Lipschitz

Nesta secção definiremos uma classe de funções contínuas que não são necessáriamente diferenciáveis relativamente a y, mas para as quais o Teorema de Picard é válido. O exemplo anterior sugere que se introduza a seguinte condição adicional sobre f, que é devida a Lipschitz.

Considere-se $f : D \to \mathbb{R}$, onde $D \subset \mathbb{R}^2$. Diz-se que

- f **é lipschitziana relativamente a** y **em** D sse

  $$|f(t, y) - f(t, w)| \leq K|y - w| \quad . \quad \forall (t, y), (t, w) \in D$$

  A constante $K \in \mathbb{R}^+$ é denominada a *constante de Lipschitz*. Observe-se que se a função f é lipschitziana relativamente a y em D, verificará

  $$\left| \frac{f(t, y) - f(t, w)}{y - w} \right| \leq K \quad . \quad \forall (t, y), (t, w) \in D$$

  o que significa que as taxas de crescimento médio de f relativamente à segunda coordenada, são limitadas em D. Em particular isto significa que:

  - ◇ Se $\partial f / \partial y$ existe (em D), então $\partial f / \partial y$ é uma função limitada em D;
  - ◇ Se $\partial f / \partial y$ não existe em todos os pontos de D (porque não existe $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(t,y+h) - f(t,y)}{h}$, para algum $(t, y) \in D$), ainda assim a razão incremental $\frac{f(t,y) - f(t,y+h)}{h}$ será sempre limitada, para todo h numa vizinhança de 0.

- f **é localmente lipschitziana relativamente a** y **em** D sse for lipschitziana relativamente a y em todo o subconjunto compacto de D.

- **Critério**

  Se f é contínua num aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe e é contínua em $D \subset \mathbb{R}^2$ então f é localmente lipschitziana relativamente a y em D.

1.3.4 Teorema de Picard

Enunciaremos, de seguida, o resultado que estabelece existência e unicidade de solução de um problema de valor inicial relativo a uma equação diferencial ordinária e escalar de primeira ordem. Veremos mais tarde que este teorema pode ser generalizado às equações vectoriais de primeira ordem, garantindo nessa versão a existência e unicidade de problemas de valor inicial envolvendo essas equações e (como sua consequência) também envolvendo equações lineares de ordem n.

Teorema de Picard

Considere-se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e $f : D \to \mathbb{R}$ contínua e localmente lipschitziana relativamente a y em D. Se $(t_0, y_0) \in D$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite uma única solução, $y(t)$, definida numa vizinhança de t_0, isto é, num intervalo $]t_0-\alpha, t_0+\alpha[$ para algum $\alpha > 0$.

A demonstração deste teorema é feita de forma construtiva, sendo obtida a solução à custa de uma sucessão de aproximações da solução. Apresentaremos em seguida essa construção e depois os vários passos da demonstração do teorema.

Equivalência entre o Problema de Valor Inicial e um Problema Integral

É fácil verificar que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

é equivalente à equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)\, ds \tag{1.11}$$

para $y \in C^1(I)$, sendo I qualquer intervalo aberto contendo t_0.

De facto, se $y \in C^1(I)$ satisfaz o PVI (1.10) então, integrando ambos os membros da equação diferencial entre t_0 e t e usando o teorema fundamental do cálculo:

$$\int_{t_0}^{t} y'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)\, ds \quad \Leftrightarrow \quad y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)\, ds$$

Usando agora a condição inicial do PVI (1.10), obtém-se a equação integral (1.11).

Reciprocamente, admitindo que $y \in C^1(I)$ é solução da equação integral (1.11) então, aplicando o teorema fundamental do cálculo ao integral do membro direito da equação conclui-se que $y(t)$ é diferenciável e que:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I.$$

Assim sendo, $y(t)$ é solução da equação diferencial. Por outro lado, substituindo t por t_0 na equação integral (1.11), obtém-se $y(t_0) = y_0$.

A equação integral é, do ponto de vista da análise matemática, muito útil pois é muito mais fácil obter estimativas de integrais do que de derivadas.

Iteradas de Picard

Derivamos agora a partir da equação integral uma sucessão de aproximações — as iteradas de Picard. Trata-se de uma sucessão de funções contínuas $y_n : I \to \mathbb{R}$ definida recursivamente por:

$$
\begin{aligned}
y_0(t) &= y_0 \\
y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_0(s)\big)\, ds \\
y_2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(t, y_1(s)\big)\, ds \\
&\vdots \\
y_{n+1}(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)\, ds \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Exemplo 1: Considere-se o problema de valor inicial (PVI)

$$
\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1.12}
$$

A solução do problema (1.12) é

$$
y(x) = e^{x^2} \qquad , \qquad I_{\mathrm{Max}} = \mathbb{R}
$$

Por outro lado a sucessão $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ das iteradas de Picard associadas ao PVI é

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= y_0 = 1 \\
y_1(x) &= 1 + \int_0^t 2sy_0(s)\, ds = 1 + \int_0^x (2s)\, ds = 1 + x^2 \\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x (2sy_1(s))\, ds = 1 + \int_0^x 2s(1+s^2)\, ds = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} \\
y_3(x) &= 1 + \int_0^x (2sy_2(s))\, ds = 1 + \int_0^x 2s(1+s^2+\frac{s^4}{2})\, ds = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Na Figura 1.5 estão representadas as primeiras iteradas de Picard assim como a solução do PVI.

Pode-se verificar, por indução matemática, que:

$$
y_n(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!} \, .
$$

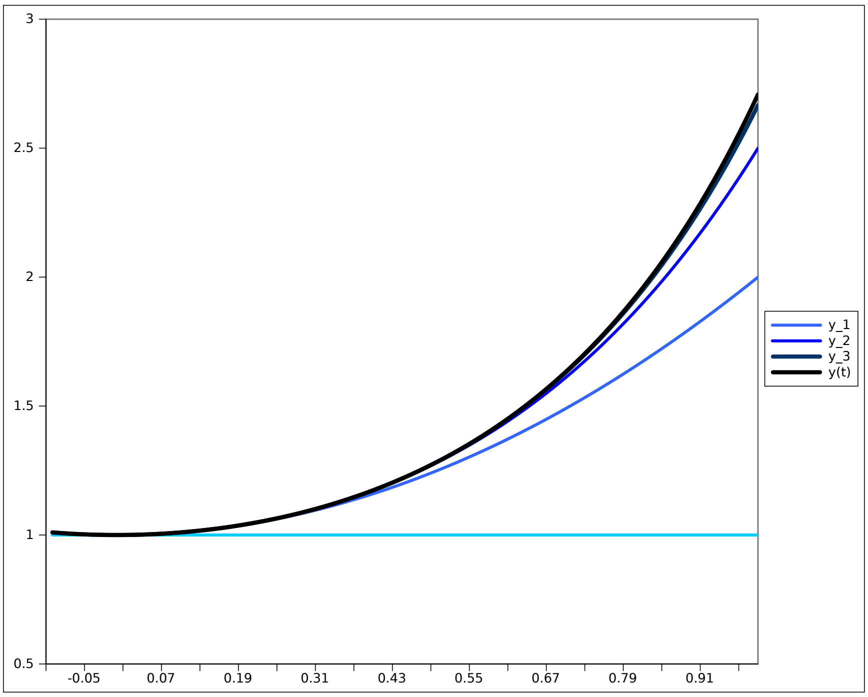

Figura 1.5: Algumas iteradas de Picard e a solução do PVI (1.12).

Neste caso, a sucessão das iteradas de Picard, y_n, é precisamente igual à sucessão das somas parciais da série de Maclaurin da solução do (PVI), $y(x) = e^{x^2}$. No entanto, e conforme se ilustra no exemplo seguinte, tal tipo de identidade pode não se verificar mesmo em casos simples.

Exemplo 2: Considere-se o (PVI)

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1.13}$$

Vamos construir a sucessão $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ das iteradas de Picard associadas ao (PVI). Assim:

$$y_0(x) = y_0 = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (y_0(s))^2 ds = 1 + \int_0^x 1\, ds = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (y_1(s))^2 ds = 1 + \int_0^x (1+s)^2\, ds = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3}$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x (y_2(s))^2 ds = 1 + \int_0^x (1 + s + s^2 + \frac{s^3}{3})^2\, ds =$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{2x^4}{3} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^6}{9} + \frac{x^7}{63}$$

$$\vdots$$

Por outro lado, resolvendo a equação diferencial, obtém-se

$$y' = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\int y^{-2} dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{c-x}\,.$$

A solução do (PVI) será então

$$y(x) = \frac{1}{1-x} \qquad , \qquad I_{\text{Max}} =]-\infty, 1[$$

Na Figura 1.6 estão representadas as primeiras iteradas de Picard, bem como a solução do (PVI). É de observar que quando nos aproximamos do ponto $x = 1$ (onde a solução do (PVI) explode) a convergência das iteradas de Picard torna-se cada vez mais lenta.

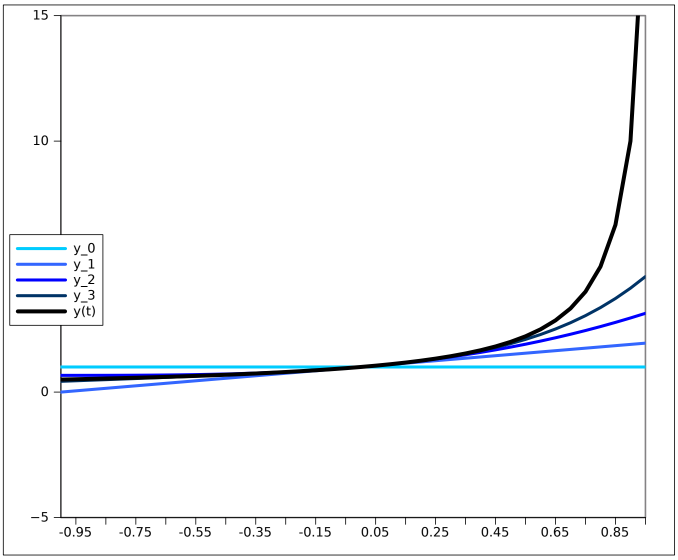

Figura 1.6: Algumas iteradas de Picard e a solução do PVI (1.13).

Pode-se provar (a demonstração não é inteiramente trivial) que as iteradas de Picard deste problema verificam

$$y_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + R_{n+1}(x) = S_n(x) + R_{n+1}(x) \tag{1.14}$$

onde $R_{n+1}(x)$ é uma função polinomial com um zero de ordem $n+1$ em $x = 0$. Note que $S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ é a sucessão das somas parciais da série geométrica, cuja soma é precisamente a solução do (PVI), $y(x) = \frac{1}{1-x}$, mas somente em $]-1, 1[$.

Em casos menos simples que estes dois exemplos — quando $f(t, y)$ não é uma função polinomial — as iteradas de Picard não são polinomiais; no entanto, e mesmo sem se conhecer a forma explícita dessas iteradas, pode-se usar a análise matemática para provar a sua convergência local.

Para concluir a demonstração do Teorema de Picard, iremos mostrar que a sucessão das iteradas de Picard, dada por

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)\, ds\,, \tag{1.15}$$

converge uniformemente num certo intervalo, $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ para uma função contínua, $y(t)$. A partir deste facto, e tomando o limite quando $n \to \infty$ em ambos os membros da igualdade (1.15), poderemos então concluir que $y(t)$ satisfaz a equação integral (1.11) em I, pelo que deverá ser solução do PVI no intervalo aberto $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$.

Convergência Uniforme das Iteradas de Picard

Vamos então demonstrar que a sucessão das iteradas de Picard, $y_n(t)$, converge uniformemente num intervalo $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, para certos $\alpha > 0$ suficientemente pequenos (o intervalo de valores possíveis irá depender de t_0, y_0 e f).

Começamos por estimar a diferença entre duas iteradas de Picard consecutivas [7]:

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)\, ds - y_0 - \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_{n-1}(s)\big)\, ds \right| \\ &\le \int_{t_0}^{t} \Big| f\big(s, y_n(s)\big) - f\big(s, y_{n-1}(s)\big) \Big| \, |ds| \end{aligned}$$

Vamos estimar a função integranda através da condição de Lipschitz. Considere-se um rectângulo $R = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : t_0 - a \le t \le t_0 + a \ \text{ e } \ y_0 - b \le y \le y_0 + b\}$ contido no domínio, D, de f.

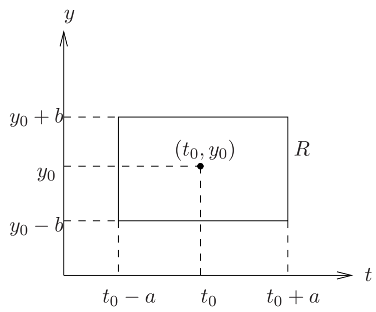

Figura 1.7: O rectângulo R.

Seja K a constante de Lipschitz de f (relativamente a y) no conjunto compacto R, ou seja, K verifica:

$$|f(t,y) - f(t,x)| \le K|y-x| \qquad \forall (t,y),(t,x) \in R \tag{1.16}$$

Para que o gráfico das iteradas de Picard permaneça no interior de R (por forma a que a estimativa de Lipschitz (1.16) seja válida quando aplicada a pontos $(t, y_n(t))$, é necessário que:

1º) $t \in]t_0 - a, t_0 + a[$, pelo que devemos ter $\underline{\alpha < a}$.

2º) Seja

$$M = \max\{|f(t,y)| : (t,y) \in R\}$$

Para que $\big(t, y_n(t)\big)$ esteja no interior de R para $t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, é necessário que $|y_n(t) - y_0| < b$. Como

$$|y_n(t) - y_0| \le \int_{t_0}^{t} \big| f\big(s, y_n(s)\big) \big| \, |ds| \le M \int_{t_0}^{t} |ds| = M|t-t_0| \le M\alpha,$$

[7] Se $f: I \to \mathbb{R}$ é contínua no intervalo I e $a, b \in I$ (sem que se tenha, necessariamente, $b \ge a$) então obtém-se, como caso particular da propriedade de majoração do integral complexo:

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \le \int_a^b |f(t)|\,|dt|.$$

Note que $\int_a^b |f(t)|\,|dt|$ é igual a $\int_a^b |f(t)|\,dt$ se $b \ge a$ e a $\int_b^a |f(t)| dt$ se $b < a$. Em particular, $\int_a^b |dt| = |b-a|$.

isso implica que devemos ter $M\alpha < b$. Para tal, é preciso exigir $\underline{\alpha < b/M}$.

Assim, para qualquer $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \stackrel{\text{def}}{=} I_\alpha$:

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} \Big| f\big(s, y_n(s)\big) - f\big(s, y_{n-1}(s)\big) \Big| \, |ds| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} K \, |y_n(s) - y_{n-1}(s)| \, |ds| \\ &\leq K \max_{s \in I_\alpha} \Big| y_n(s) - y_{n-1}(s) \Big| \int_{t_0}^{t} |ds| \\ &\leq K\alpha \max_{s \in I_\alpha} \Big| y_n(s) - y_{n-1}(s) \Big| \end{aligned}$$

Isto implica que:

$$\begin{aligned} \max_{t \in I_\alpha} \Big| y_{n+1}(t) - y_n(t) \Big| &\leq K\alpha \max_{t \in I_\alpha} \Big| y_n(t) - y_{n-1}(t) \Big| \\ &\leq (K\alpha)^2 \max_{t \in I_\alpha} \Big| y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t) \Big| \\ &\vdots \\ &\leq (K\alpha)^n \max_{t \in I_\alpha} \Big| y_1(t) - y_0 \Big| \end{aligned}$$

Como $y_1(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, y_0) \, ds$, resulta então da desigualdade anterior que:

$$\begin{aligned} \max_{t \in I_\alpha} \Big| y_{n+1}(t) - y_n(t) \Big| &\leq (K\alpha)^n \max_{t \in I_\alpha} \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_0) \, ds \right| \\ &\leq (K\alpha)^n \max_{t \in I_\alpha} \int_{t_0}^{t} |f(s, y_0)| \, |ds| \\ &\leq (K\alpha)^n \max_{t \in I_\alpha} \int_{t_0}^{t} M |ds| \\ &= (K\alpha)^n M\alpha < (K\alpha)^n b \end{aligned}$$

Definindo $r = K\alpha$, então

$$\max_{t \in I_\alpha} \Big| y_{n+1}(t) - y_n(t) \Big| < b r^n. \tag{1.17}$$

Utilizando somas telescópicas:

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \big(y_n(t) - y_{n-1}(t)\big) + \big(y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)\big) + \dots \\ &\quad \dots + \big(y_2(t) - y_1(t)\big) + \big(y_1(t) - y_0\big) + y_0 \\ &= y_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(y_k(t) - y_{k-1}(t) \Big) \end{aligned}$$

Isto significa que $y_n(t)$ é a sucessão das somas parciais da série

$$y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \Big(y_k(t) - y_{k-1}(t) \Big) \tag{1.18}$$

A terceira restrição que introduzimos ao valor de α é $r = K\alpha < 1$, ou seja $\underline{\alpha < 1/K}$. Assim, como $|r| < 1$, $\sum_{k=m}^{\infty} br^k$ é uma série geométrica convergente. Por outro lado, o termo geral da série (1.18) verifica

$$\Big| y_k(t) - y_{k-1}(t) \Big| \leq br^k,$$

para $k \geq 1$. Pelo critério de Weierstrass, $y_n(t)$ converge uniformemente em I_α, e o limite é a soma da série de funções contínuas (1.18). Resulta assim que $y : I_\alpha \to \mathbb{R}$ existe e é contínua desde que tomemos:

$$\alpha < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K} \right\} \tag{1.19}$$

Existência e Regularidade da Solução

Considerando agora as iteradas de Picard,

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(t, y_n(t)\big)\, dt \tag{1.20}$$

e usando a convergência uniforme de $y_n(t)$ para $y(t)$ em I_α, então tomando o limite em ambos os membros de (1.20) conclui-se que que $y(t)$ satisfaz a equação integral:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(t, y(t)\big)\, dt$$

Como $y(t)$ é contínua em I_α, então $f\big(t, y(t)\big)$ é contínua em I_α. Por aplicação do teorema fundamental do cálculo ao 2º membro da equação integral, podemos concluir que $y \in C^1(I_\alpha)$.

Unicidade de Solução

Supondo que $y(t)$ e $z(t)$ são duas soluções do PVI, então verificam

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(t, y(t)\big)\, dt$$

$$z(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(t, z(t)\big)\, dt$$

em $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, onde α satisfaz (1.19). Assim:

$$\begin{aligned}
|y(t) - z(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} \Big| f\big(s, y(s)\big) - f\big(s, z(s)\big) \Big|\, |ds| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} K\, |y(s) - z(s)|\, |ds| \\
&\leq K \max_{s \in I_\alpha} \big| y(s) - z(s) \big| \int_{t_0}^{t} |ds| \\
&\leq K\alpha \max_{s \in I_\alpha} \big| y(s) - z(s) \big|
\end{aligned}$$

Como $\alpha < 1/K$, ou seja, $K\alpha < 1$,

$$|y(t) - z(t)| \leq \max_{s \in I_\alpha} \Big| y(s) - z(s) \Big|,$$

sendo a igualdade apenas verificada quando $\max_{s\in I_\alpha}\big|y(s)-z(s)\big| = 0$. Como é impossível que se verifique a desigualdade estrita para todo o $t \in I_\alpha$ (pois o máximo de $|y(t)-z(t)|$ é atingido num ponto $t_1 \in I_\alpha$) concluímos que $\max_{s\in I_\alpha}\big|y(s)-z(s)\big| = 0$, ou seja:

$$y(t) = z(t) \qquad \forall t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$$

$\square$

1.3.5 O teorema de Picard (revisitado) e alguns exemplos

Vejamos agora o enunciado do teorema que efectivamente provámos, onde se acrescenta a informação que obtivémos sobre o tamanho dos intervalos onde se garante existência e e unicidade de solução.

Teorema de Picard
Considere-se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e $f : D \to \mathbb{R}$ contínua e localmente lipschitziana relativamente a y em D. Se $(t_0, y_0) \in D$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite uma única solução, $y(t)$, definida numa vizinhança de t_0, isto é, num intervalo do tipo $]t_0-\alpha, t_0+\alpha[$.
Além disso, a conclusão acima é válida para qualquer $\alpha < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K}\}$, onde a e b são as dimensões de um rectângulo $R = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : |t-t_0| \leq a \ \text{e}\ |y-y_0| \leq b\}$ contido em D [8], $M = \max_{(t,y)\in R} |f(t,y)|$ e K é uma constante de Lipschitz de f em R [9].

Supondo que f satisfaz as condições do teorema de Picard, podemos desde já concluir o seguinte: os gráficos de quaisquer duas soluções distintas, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ da *mesma* equação diferencial,

$$y' = f(t,y),$$

definidas no mesmo intervalo aberto, $I \subset \mathbb{R}$, não se podem intersectar; isto é, não existe $\tilde{t} \in I$ tal que

$$y_1(\tilde{t}) = y_2(\tilde{t})$$

Isto porque, admitindo que o oposto seria válido então, e tomando $\tilde{y} = y_1(\tilde{t}) = y_2(\tilde{t})$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(\tilde{t}) = \tilde{y} \end{cases}$$

teria *duas soluções distintas*, $y_1(t)$ e $y_2(t)$, definidas numa vizinhança de $\tilde{t}$. Ora isto contradiz a conclusão do teorema de Picard.

Exemplos:

[8] Ver fig. 1.7

[9] Ou seja, $K > 0$ é tal que $|f(t,y)-f(t,x)| \leq K|y-x|$ para quaisquer $(t,y),(t,x) \in R$.

(1) Considere-se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{1-xy} \quad , \quad y(0) = 0 \tag{1.21}$$

Começemos por observar que $f(x,y) = \sqrt[3]{1-xy}$

- está definida e é contínua em $\mathbb{R}^2$;
- $\partial f/\partial y$ está definida e é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \ : \ xy = 1\}$, consequentemente, f é localmente lipschitziana neste conjunto.

Conclui-se que $f(x,y)$ verifica as condições do Teorema de Picard em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \ : \ xy = 1\}$. Dado que $(x_0, y_0) = (0,0) \in D$ o problema de valor inicial (1.21) admite uma única solução, $y(x)$ definida numa vizinhança de $x_0 = 0$.

(2) Considere-se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{1-xy} \quad , \quad y(1) = 1 \tag{1.22}$$

Como vimos no exemplo anterior $f(x,y) = \sqrt[3]{1-xy}$ verifica as condições do Teorema de Picard em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \ : \ xy = 1\}$. Em primeiro lugar, e dado que $f(x,y)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$, o Teorema de Peano garante que o PVI (1.22) admite pelo menos uma solução definida numa vizinhança de $x_0 = 1$. No entanto neste exemplo tem-se que $(x_0, y_0) = (1,1) \notin D$. Apesar disso não se pode, de imediato, concluir que $f(x,y)$ não verifica as condições do Teorema de Picard num conjunto que contenha $(1,1)$. O facto de $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ não existir não é suficiente para garantir que $f(x,y)$ não é lipschtziana em conjuntos contendo $(1,1)$; teremos, por isso, que o verificar directamente. Assim, seja B qualquer subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^2$, e (x,y_1), $(x,y_2) \in B$:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left| \sqrt[3]{1-xy_1} - \sqrt[3]{1-xy_2} \right| = \left| \frac{\sqrt[3]{1-xy_1} - \sqrt[3]{1-xy_2}}{y_1 - y_2} \right| |y_1 - y_2|$$

Para que f seja lipschitziana em B, a quantidade

$$L(x,y_1,y_2) = \left| \frac{\sqrt[3]{1-xy_1} - \sqrt[3]{1-xy_2}}{y_1 - y_2} \right|$$

tem que ser limitada para todos (x,y_1), $(x,y_2) \in B$. Considere-se $(x,y_2) = (1,1)$ e $(x,y_1) = (1, 1+h)$ para $h \in \mathbb{R}$. Temos então que

$$L(1,1,1+h) = \left| \frac{\sqrt[3]{-h}}{h} \right| = |h|^{-2/3}$$

É então fácil de observar que para valores de h próximos de 0 (o que corresponde a estarmos em pontos (x,y) próximos de $(1,1)$), $|h^{-2/3}|$ aproxima-se de ∞ pelo que $L(1,1,1+h)$ não é limitada. Concluimos que f não é lipschtziana em qualquer conjunto contendo o ponto $(1,1)$, pelo que não se verificam as condições do Teorema de Picard numa vizinhança de $(1,1)$. Concluimos então que não se pode garantir unicidade de solução para (1.22).

(3) Considere-se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = |x+y| \quad , \quad y(1) = -1 \tag{1.23}$$

Começemos por observar que $f(x,y) = |x+y|$ está definida e é contínua em $\mathbb{R}^2$ o Teorema de Peano garante que o PVI (1.23) admite pelo menos uma solução definida numa vizinhança de $x_0 = 1$. Por outro lado, $\partial f/\partial y$ está definida e é contínua em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \ : \ x+y=0\}$. Visto $(x_0, y_0) \notin D$, teremos que averiguar directamente se $f(x,y)$ é lipschitziana numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0) = (1,-1)$. conjunto limitado e fechado que contenha $(1,-1)$. Assim, seja B qualquer subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^2$, e (x,y_1), $(x,y_2) \in B$.

$$|f(x,y_1) - f(x-y_2)| = |\,|x+y_1| - |x+y_2|\,| \leq \Big|(x+y_1) - (x+y_2)\Big| = |y_1 - y_2|$$

Tem-se então que $f(x,y)$ é lipschitziana em B (com constante de Lipschitz $L=1$, pelo que f é localmente lipschitziana em $\mathbb{R}^2$. O Teorema de Picard garante então unicidade de solução para (1.23).

(4) Sendo $a \in \mathbb{R}$, considere-se o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + ay = y^2 \cos(y+t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1.24}$$

Definindo $f(t,y) = -ay + y^2\cos(y+t)$, a equação pode-se escrever na forma $y' = f(t,y)$. Note-se que $f(t,y)$ é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^2$, logo é contínua e localmente lipshitziana relativamente a y em $\mathbb{R}^2$. Pelo teorema de Picard, existe solução única do problema de valor inicial numa vizinhança de $t_0 = 0$, ou seja, num intervalo $]-\alpha, \alpha[$, para algum $\alpha > 0$.

Determinemos agora um intervalo de valores de a para os quais a solução do problema (1.24) está definida em $\mathbb{R}$. Notando que a equação $y' = f(t,y) = y(y-a)\cos(y+t)$ tem as soluções estacionárias $u(t) \equiv 0$ e $v(t) \equiv a$, basta tomarmos $a > 1$ para que se verifique

$$0 < y(0) = 1 < a$$

Como, pelo teorema de Picard, os gráficos de soluções *distintas* do problema $y' = f(t,y)$ não se podem intersectar, então uma solução que começa num ponto $y(0) \in]0,a[$ deve permanecer nesse intervalo (pois não se pode ter $y(t) = u(t) = 0$ ou $y(t) = v(t) = a$ para qualquer $t \in I_{max}$). Assim sendo:

$$0 \leq y(t) \leq a \qquad \forall t \in I_{\max}$$

Para concluirmos que $I_{\max} = \mathbb{R}$ podemos aplicar o teorema de Picard (em versão melhorada) sucessivamente. Por exemplo, tomando $t_1 = \alpha$ e $y_1 = y(\alpha)$, o problema

$$\begin{cases} y' + ay = y^2 \cos(y+t) \\ y(t_1) = y_1 \end{cases} \tag{1.25}$$

tem solução única definida num intervalo $]t_1 - \alpha_1, t_1 + \alpha_1[$, o que permite prolongar a solução (única) do PVI (1.25) ao intervalo $]-\alpha, \alpha + \alpha_1[$. Repetindo este procedimento, pode-se provar que $I_{\max} \supset [0, \infty[$. Fazendo o mesmo do lado esquerdo do intervalo $]-\alpha, \alpha[$, podemos igualmente provar que $I_{max} \supset]-\infty, 0]$.

Em vez de discutirmos a prova neste exemplo particular, veremos na próxima secção uma forma sistemática de o fazer utilizando o teorema do prolongamento da solução.

1.3.6 Prolongamento de Solução

Considere agora um problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

que verifique as condições do teorema de Picard.

Sejam $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ e $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ tais que $I_1 \subset I_2$. Pode-se desde já concluir que a restrição de y_2 a I_1 é precisamente y_1. Caso contrário, teríamos duas soluções distintas da equação diferencial definidas em I_1, cujos gráficos se intersectam em pelo menos (t_0, y_0). Como já vimos na subsecção 1.3.5, isto entraria em contradição com a unicidade de solução. Diz-se por isso que a solução y_2 *é um prolongamento da solução* $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ *ao intervalo* $I_2 \supset I_1$.

Sem acrescentar mais condições a f, a conclusão do teorema de Picard pode ser substancialmente melhorada de forma a incluir alguma informação sobre a possibilidade de prolongamento da solução local.

Teorema (Prolongamento de Solução):
Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $(t_0, y_0) \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ contínua e localmente lipshitziana relativamente a y em D. Então a solução única do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

está definida num intervalo máximo de definição, $I_{max} =]a, b[$, cujos extremos, $a, b \in \mathbb{R}$, verificam

(i) $b = +\infty$ **ou**

(ii) $b < +\infty$ e $\big(t, y(t)\big) \to \partial D$ quando $t \to b^-$ **ou**

(iii) $b < +\infty$ e $\lim_{t \to b^-} |y(t)| = +\infty$

e

(i) $a = -\infty$ **ou**

(ii) $a > -\infty$ e $\big(t, y(t)\big) \to \partial D$ quando $t \to a^+$ **ou**

(iii) $a > -\infty$ e $\lim_{t \to a^+} |y(t)| = +\infty$

Note que os casos do tipo (iii) significam que a solução explode (respectivamente, quando $t \to b$ ou $t \to a$). Quanto aos casos do tipo (ii), por exemplo

$$\big(t, y(t)\big) \to \partial D \quad \text{quando} \quad t \to b^-$$

significa que qualquer ponto limite do gráfico de $y(t)$ para $t \in [t_0, b[$ (este gráfico é o conjunto $\{(t, y(t)) : t \in [t_0, b[\} \subset \mathbb{R}^2$) pertence à fronteira de D, ∂D. Isto é equivalente a dizer que qualquer sucessão $t_n \in]a, b[$ tal que $t_n \to b$ e $y(t_n)$ é convergente verifica:

$$\lim_{n \to +\infty} \big(t_n, y(t_n)\big) \in \partial D$$

(e, analogamente, quando $t \to a^+$).

Dem.:

Vamos provar a conclusão do teorema para o prolongamento para a direita, isto é, até b.

Seja J o conjunto dos $\tau \in \mathbb{R}$ tais que existe solução $y : [t_0, \tau] \to \mathbb{R}$ do problema de valor inicial [10]. Pelo teorema de Picard, $J \neq \emptyset$. Se J não for majorado, então a conclusão do teorema é satisfeita pois verifica-se o caso (i). Por outro lado, se J é majorado, como $J \neq \emptyset$ então existe $b = \sup J < +\infty$.

Admitamos que tanto (ii) como (iii) não se verificam. Como $\lim\limits_{t \to a^+} |y(t)| = +\infty$ não é verdade, então existe uma sucessão $s_n \to b^-$ tal que $y(s_n)$ é limitada; sendo limitada, tal sucessão tem uma subsucessão convergente. Isto mostra que existem sucessões $t_n \in]a, b[$ tais que $t_n \to b$ e $y(t_n)$ é convergente. Mas como (ii) não se verifica, então para pelo menos uma dessas sucessões, $\big(t_n, y(t_n)\big)$ converge para um certo $(b, \omega) \in \operatorname{int} D$.

Seja $\delta < \frac{1}{3}\operatorname{dist}\big((b,\omega), \partial D\big)$; assim sendo, $\overline{B_{3\delta}(b,\omega)}$ é um subconjunto compacto de D. Seja K a constante de Lipschitz de f em $\overline{B_{3\delta}(b,\omega)}$ e

$$\alpha = \min\left\{\delta, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{K}\right\}. \tag{1.26}$$

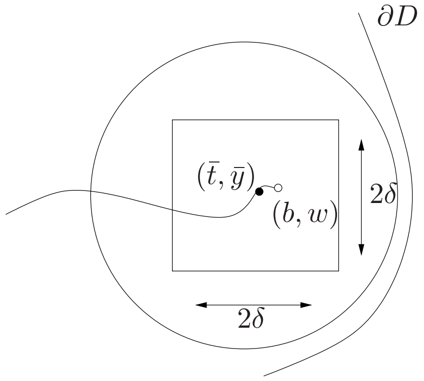

Figura 1.8

Seja $(\bar{t}, \bar{y})$ um termo da sucessão $\big(t_n, y(t_n)\big)$ tal que

$$\big\|(\bar{t}, \bar{y}) - (b, \omega)\big\| < \alpha \tag{1.27}$$

Então o quadrado

$$R = \Big\{(t, y) : t \in [\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta] \text{ e } y \in [\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta]\Big\}$$

verifica

$$R \subset \overline{B_{\delta\sqrt{2}}(\bar{t}, \bar{y})} \subset B_{\delta\sqrt{2}+\alpha}(b, \omega) \subset B_{3\delta}(b, \omega),$$

pois, tendo em conta (1.26), $\delta\sqrt{2} + \alpha \leq \delta\sqrt{2} + \delta < 3\delta$.

Pelo teorema de Picard (em versão melhorada) e (1.26), concluimos que a solução $y(t)$ admite extensão ao intervalo $[t_0, \bar{t} + \alpha]$ e que, tendo em conta (1.27), $b - \bar{t} < \alpha$, o que implica que:

[10] Note que se $y : I \to \mathbb{R}$ e $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ (onde $I \subset \tilde{I}$ são intervalos), então a solução $\tilde{y}$ restrita a I é uma solução do PVI em I. Resulta da unicidade de solução do PVI que $\tilde{y}(t) = y(t)$ para qualquer $t \in I$; ou seja, a restrição de $\tilde{y}$ ao domínio de y, I, coincide necessariamente com y.

$$\bar{t} + \alpha > b$$

Mas isto é absurdo, pois contradiz o facto de que $b = \sup J$.

A demonstração do prolongamento para a esquerda (até a) é análoga à anterior. $\square$

Em qualquer um dos casos, verificar que a solução não pode ser prolongada até $t = \infty$ (ou $t = -\infty$) porque a fronteira do conjunto D é atingida pode ser fácil de constatar pois a função $f(t, y)$ é dada e, consequentemente, conhecemos os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ onde o gráfico da solução não pode entrar. Para mostrar que a solução explode (ou que não explode) ou, mais genericamente, que o seu gráfico está confinado a uma certa região de $\mathbb{R}^2$, é muito útil o seguinte critério.

1.3.7 Comparação de Soluções

Comparação de Soluções:

Considere-se $D \subseteq \mathbb{R}^2$, f, $g : D \to \mathbb{R}$ verificando as condições do Teorema de Picard e $(t_0, y_0) \in D$.
Sejam ainda, $y(t)$ a solução do PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad , \qquad y(t_0) = y_0$$

e $u(t)$ a solução do PVI

$$\frac{du}{dt} = g(t, u) \qquad , \qquad u(t_0) = y_0$$

Se

$$f(t, y) \leq g(t, y) \quad , \quad \forall (t, y) \in D$$

então

$$\begin{cases} y(t) \leq u(t) & \text{para todo} \quad t \geq t_0 \\ \\ y(t) \geq u(t) & \text{para todo} \quad t \leq t_0 \end{cases}$$

Consequências:

- **Mostrar que a solução explode**

  Seja $u(t)$ a solução do PVI

  $$\frac{du}{dt} = g(t, u) \qquad , \qquad u(t_0) = \alpha$$

  definida em $I^u_{\max} =]t_0 - \epsilon, T[$, tendo-se que $\lim_{t \to T^-} u(t) = +\infty$. Se $y(t)$ é solução do PVI

  $$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad , \qquad y(t_0) = \alpha$$

e $f(t,y) \geq g(t,y)$ para todo (t,y). Observe-se que, pelo teorema anterior, esta condição implica que $y(t) \geq u(t)$ para todo $t \geq \alpha$; assim sendo, $y(t)$ explode no intervalo $]t_0, T]$, isto é, existe $\Theta \in]t_0, T]$ tal que $\lim\limits_{t \to \Theta^-} y.(t) = +\infty$ e consequentemente $\sup I^y_{\max} = \Theta$

- **Mostrar que a solução não explode**

  Seja $u(t)$ a solução do PVI
  $$\frac{du}{dt} = g(t,u) \qquad , \qquad u(t_0) = \alpha$$
  definida em $I^u_{\max} =]a, +\infty[$ para certo $a < t_0$. Se $y(t)$ é solução do PVI
  $$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \qquad , \qquad y(t_0) = \alpha$$
  e $f(t,y) \leq g(t,y)$ para todo (t,y) (observe-se que pelo teorema anterior esta condição implica que $y(t) \leq u(t)$ para todo $t \geq \alpha$), então $y(t)$ não explode para $+\infty$ em $]t_0, +\infty[$. Analogamente, seja $v(t)$ a solução do PVI
  $$\frac{dv}{dt} = h(t,v) \qquad , \qquad v(t_0) = \alpha$$
  definida em $I^v_{\max} =]a_1, +\infty[$ para certo $a_1 < t_9$. Se $y(t)$ é solução do PVI
  $$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \qquad , \qquad y(t_0) = \alpha$$
  e $f(t,y) \geq h(t,y)$ para todo (t,y) (observe-se que pelo teorema anterior esta condição implica que $y(t) \geq v(t)$ para todo $t \geq \alpha$), então $y(t)$ não explode para $-\infty$ em $]t_0, +\infty[$. Conclui-se que $y(t)$ não explode no intervalo $]t_0, +\infty[$.

Exemplo 1

Considere-se o PVI
$$y' = (1+y^2)f(ty) \quad , \quad y(0) = 0 \tag{1.28}$$
em que f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$, verificando $f(x) \geq 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Como a função $(1+y^2)f(ty)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$, e a função
$$\frac{\partial}{\partial y}\big((1+y^2)f(ty)\big) = 2yf(ty) + (1+y^2)f'(ty)t$$
é também contínua em $\mathbb{R}^2$ — logo f é localmente lipschitziana relativamente a y em $\mathbb{R}^2$ — o teorema de Picard garante a existência de uma solução única, $y(t)$, definida num vizinhança aberta da origem e que verifica $y(0) = 0$.

Pretendemos agora mostrar que o intervalo máximo de definição da solução do problema de valor inicial é majorado. Note que, para qualquer número real ty, $f(ty) \geq 1$, o que implica que:
$$(1+y^2)f(ty) \geq 1 + y^2 \qquad \text{para qualquer} \quad (t,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{1.29}$$
Consideremos agora o problema de valor inicial
$$u' = 1 + u^2 \quad , \quad u(0) = 0\,;$$

resolvendo a equação separável e fazendo uso da condição inicial, obtém-se a sua única solução:

$$u(t) = \operatorname{tg} t,$$

definida em $]\pi/2, \pi/2[$. Note que $u(t)$ explode quando $t \to \pm\pi/2$.

Tendo em conta a estimativa (1.29), utilizando o teorema de comparação de soluções, a solução $y(t)$ do (PVI) (1.28) verifica:

$$y(t) \geq u(t) = \operatorname{tg} t \qquad \text{para} \quad t \geq 0$$

Como $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} t = +\infty$ a solução explode e, como tal, o intervalo máximo de definição da solução do problema de valor inicial é majorado.

Exemplo 2

Considere-se o problema de valor inicial

$$y' = -2(\operatorname{sen}(e^{ty}) + 2)y \quad , \quad y(0) = 1 \tag{1.30}$$

Sendo

$$f(t, y) = -2(\operatorname{sen}(e^{ty}) + 2)y$$

é fácil de verificar que tanto f como $\partial f/\partial y$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$. Isto implica que f verifica as condições do Teorema de Picard em $D = \mathbb{R}^2$ e assim (1.30) tem uma solução única numa vizinhança de $t_0 = 0$. Temos agora que mostrar que a solução pode ser prolongada a $\mathbb{R}$. Observemos que para $y(t) > 0$ (isso acontecerá, pelo menos, numa vizinhança de $t_0 = 0$), a equação é equivalente a:

$$\frac{y'}{y} = -2(\operatorname{sen}(e^{ty}) + 2)$$

Integrando esta igualdade de 0 a t, obtém-se:

$$\log y(t) - \log y(0) = \int_0^t (-2(\operatorname{sen}(e^{sy(s)}) + 2))ds$$

Como, para quaisquer $(s, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$-6 \leq -2(\operatorname{sen}(e^{sy(s)}) + 2) \leq -2$$

pode-se concluir que:

$$-6t \leq \int_0^t (-2(\operatorname{sen}(e^{sy(s)}) + 2))ds \leq -2t \qquad \text{para} \quad t \geq 0,$$

$$-2t \leq \int_0^t (-2(\operatorname{sen}(e^{sy(s)}) + 2))ds \leq -6t \qquad \text{para} \quad t \leq 0.$$

Desta forma (e como $\log y(0) = \log 1 = 0$):

$$-6t \leq \log y(t) \leq -2t \qquad \text{para} \quad t \geq 0$$

$$-2t \leq \log y(t) \leq -6t \qquad \text{para} \quad t \leq 0$$

Em primeiro lugar, isto mostra que $\log y(t)$ não explode. Em particular, isto implica que $y(t) \neq 0$, para qualquer $t \in I_{\max}$; pois se existisse β tal que $y(\beta) = 0$ então $\lim_{t\to\beta} \log y(t) = -\infty$. Desta forma, as desigualdades acima estimam o valor de $y(t)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ onde a solução está definida. O gráfico da solução está confinado à região do plano situada entre as curvas $y = e^{-2t}$ e $y = e^{-6t}$, pelo que $y(t)$ não explode em tempo finito. Como o domínio de f é $\mathbb{R}^2$, o teorema do prolongamento de solução garante a existência de uma (única) solução global.

(continua)

1.4 Equações Vectoriais ou Sistemas de 1ª Ordem

Sendo $I \subset \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ e, para $i = 1, ..., n$, $f_i : I \times A \to \mathbb{R}$, denomina-se por *equação diferencial vectorial* de primeira ordem um sistema de equações do tipo

$$\begin{cases} y_1'(t) &= f_1\big(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\big) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= f_n\big(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\big) \end{cases}$$

onde as soluções são funções $y_1(t), ..., y_n(t) : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 em I. Utilizando notação vectorial, este sistema pode então ser escrito de forma abreviada como a equação vectorial

$$\mathbf{y}'(t) = F(t, \mathbf{y}(t))\,,$$

sendo

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ y_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(t, \mathbf{y}(t)) = \begin{bmatrix} f_1\big(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\big) \\ . \\ . \\ . \\ f_n\big(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\big) \end{bmatrix}$$

Tal como no caso escalar ($n = 1$), sendo $t_0 \in I$, denomina-se problema de valor inicial a

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = F\big(t, \mathbf{y}(t)\big) \ , \ t \in I \\ \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

onde se supõe que $t_0 \in I$ e $\mathbf{y}_0 = \big(y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)\big) \in A$.

1.4.1 Condição de Lipschitz e Teorema de Picard no Caso Vectorial

Uma função vectorial, $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, contínua em D, denomina-se *localmente lipschitziana relativamente a* **y** se cada uma das funções escalares $f_i(t, y_1, ..., y_n)$, $i = 1, ..., n$, for localmente lipschitziana relativamente a y_1,..., y_n em D, isto é

$$|f_i(t, y_1, \ldots, y_n) - f_1(t, x_1, \ldots, x_n)| \leq K||(y_1, \ldots, y_n) - (x_1, \ldots, x_n)|| \quad \text{onde}$$

$$||(y_1, \ldots, y_n) - (x_1, \ldots, x_n)|| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}$$

para todos $(t, y_1, \ldots, y_n)$, $(t, u_1, \ldots, u_n)$ em subconjuntos compactos de D. Isto é equivalente a dizer que existe $L \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$||\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x})|| \leq L||\mathbf{y} - \mathbf{x}||$$

para quaisquer $(t, \mathbf{y}), (t, \mathbf{x}) \in D$. [11]

O seguinte teorema tem demonstração análoga ao teorema homónimo que enunciámos anteriormente para o caso escalar.

Teorema de Picard (Existência e unicidade de solução no caso vectorial): Considere-se o domínio $D = I \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, onde $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}$ é contínua e localmente lipschitziana relativamente a $\mathbf{y}$. Se $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

admite solução única num intervalo $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$, para certo $\alpha > 0$.

1.4.2 Equações Vectoriais Lineares

A equação vectorial denomina-se *linear* se a função $F(t, \mathbf{y})$ for linear em $\mathbf{y}$, isto é, se for da forma

$$\begin{cases} y_1'(t) & = & a_{11}(t)y_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n'(t) & = & a_{n1}(t)y_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

ou, na forma vectorial:

$$\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \tag{1.31}$$

sendo

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A(t) \begin{bmatrix} a_{11}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}(t) \ldots a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}.$$

Funções matriciais

No seguimento, será necessário estudar funções X cujo domínio é um intervalo real e cujo conjunto de chegada é um espaço vectorial de matrizes reais (ou complexas) de dimensão $n \times m$, que aqui denotaremos por $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ (ou $\mathbb{C}$).

Genericamente, um função $X : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, com

$$X(t) = \Big[x_{ij}(t)\Big]_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots m}}$$

[11] Recordamos que, dados dois conjuntos A e B, o produto cartesiano de A por B, denotado $A \times B$, é o conjunto dos pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$. No nosso caso, se $t \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, então $(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. É usual identificar $(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ com $(t, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$; neste sentido, podemos dizer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$.

pode, de facto, ser interpretada como uma função vectorial com as $n \times m$ componentes:

$$x_{11}(t), \ldots, x_{1m}(t),\ x_{21}(t), \ldots, x_{2m}(t), \ldots \quad \ldots,\ x_{n1}(t), \ldots, x_{nn}(t).$$

Sendo assim, pode-se neste contexto utilizar os conceitos e resultados já discutidos quando se estudou as funções vectoriais. A derivada de $X(t)$ é, então, dada por

$$\frac{dX}{dt} = \left[\frac{dx_{ij}}{dt}\right]_{\substack{i=1,\ldots n \\ j=1\ldots m}},$$

e está bem definida se as funções componentes forem diferenciáveis em I. Analogamente, o integral de X entre $t_0, t \in I$ é dado por:

$$\int_{t_0}^{t} X(s)\, ds \quad = \quad \left[\int_{t_0}^{t} x_{ij}(s)\, ds\right]_{\substack{i=1,\ldots n \\ j=1\ldots m}} \quad ,$$

sempre que as funções componentes sejam seccionalmente contínuas em I. Desta forma, a *linearidade* da derivada e do integral ficam asseguradas.

Relativamente à derivada do produto de duas matrizes,

$$X(t) = \Big[x_{ik}(t)\Big]_{\substack{i=1\ldots n \\ k=1\ldots m}} \qquad \text{por} \qquad Y(t) = \Big[y_{kj}(t)\Big]_{\substack{k=1\ldots m \\ j=1\ldots k}} \quad ,$$

o resultado tem que ser deduzido (porquê?). No entanto isso, é tarefa relativamente fácil: calculando a derivada da componente (i,j) de $X(t)Y(t)$, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{m} x_{ik}(t) y_{kj}(t) = \sum_{k=1}^{m} x'_{ik}(t) y_{kj}(t) + \sum_{k=1}^{m} x_{ik}(t) y'_{kj}(t) \quad ,$$

Resulta assim que

$$\big(X(t)Y(t)\big)' = X'(t)Y(t) + X(t)Y'(t).$$

Exemplo: Dada uma função escalar $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma matriz $n \times n$, $A = \big[a_{ij}\big]_{i,j=1}^{n}$, de componentes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (independentes de t), vejamos como se calculam a derivada e o integral da função matricial $\varphi(t)A$ [12].

(a) Se φ é de classe C^1 então:

$$\frac{d}{dt}\Big(\varphi(t)A\Big) = \left[\frac{d}{dt}\Big(a_{ij}\varphi(t)\Big)\right]_{i,j=1}^{n} = \Big[a_{ij}\varphi'(t)\Big]_{i,j=1}^{n} = \varphi'(t)\Big[a_{ij}\Big]_{i,j=1}^{n} = \varphi'(t)A$$

Identicamente (verifique):

(b) Se φ é seccionalmente contínua em qualquer intervalo fechado e limitado, então:

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(s)A\ ds = \left(\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\, ds\right) A,$$

(c) Se φ é contínua então, usando o teorema fundamental do cálculo:

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \varphi(s)A\ ds = \varphi(t)A$$

[12] Note que $\varphi(t)A$ é o produto do escalar $\varphi(t)$ pela matriz constante A.

Caso Homogéneo e Matriz Solução Fundamental

Fazendo $\mathbf{b}(t) \equiv 0$ na equação (1.31), obtém-se a equação linear homogénea associada

$$\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t) \tag{1.32}$$

com $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e $A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]_{i,j=1}^{n}$, onde as funções $a_{ij}(t) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas.

Definição (*Matriz Solução Fundamental*)**:** Uma matriz $\mathbf{S}(t)$ denomina-se matriz solução fundamental de (1.32) se e só se

(i) $\det \mathbf{S}(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, o que significa que as colunas de $\mathbf{S}(t)$ são linearmente independentes ($\mathbf{S}(t)$ é não singular) para qualquer $t \in I$;

(ii) as colunas de $\mathbf{S}(t)$ são soluções da equação $\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t)$.

Exemplo 1:
Considere-se a equação vectorial

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) \quad \text{sendo} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

Fazendo $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, a equação pode ser escrita na forma

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -y \end{cases}$$

Atendendo a que a segunda equação só depende da função y, podemos resolvê-la. Assim:

$$y' = -y \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = c_1 e^{-t}$$

Substituindo na primeira equação obtém-se

$$x' - x = -c_1 e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(e^{-t}x\right) = -c_1 e^{-2t} \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{c_1}{2}e^{-t} + c_2 e^t$$

Tem-se então que a solução geral da equação vectorial é

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{2}e^{-t} + c_2 e^t \\ c_1 e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}(t)C,$$

É agora fácil de verificar que a matriz $S(t)$ acima definida é uma matriz solução fundamental associada à equação (1.33). De facto

(i) A matriz $\mathbf{S}(t)$ é não singular em $\mathbb{R}$, pois

$$\det \mathbf{S}(t) = -1 \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(ii) Verifica-se que $\mathbf{y}_i'(t) = A\mathbf{y}_i(t)$, $i = 1, 2$ em que $\mathbf{y}_i(t)$ representa a coluna i de $\mathbf{S}(t)$. De facto, para $i = 1$

$$\mathbf{y}_1'(t) = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A\mathbf{y}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

e para $i = 2$

$$\mathbf{y}_2'(t) = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e^{t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A\mathbf{y}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observe-se que não há uma única matriz solução fundamental da equação — por exemplo, se $\mathbf{S}(t)$ é uma matriz solução fundamental qualquer matriz obtida por troca de colunas de $\mathbf{S}(t)$ é tambem uma matriz solução fundamental.

Proposição (*Caracterização da Matriz Solução Fundamental*): $\mathbf{S}(t)$ é uma matriz solução fundamental da equação (1.32) se e só se:

(i) Existe um $t_0 \in I$ tal que $S(t_0)$ é não singular.

(ii) $\mathbf{S}'(t) = A(t)\mathbf{S}(t)$

Demonstração: (ii) é apenas outra forma de escrever a alínea (ii) da definição de $\mathbf{S}(\mathbf{t})$. Quanto a (i), suponhamos que existe um $\hat{t} \in I$ tal que $\mathbf{S}(\hat{t})$ é singular; isto é, para certo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\mathbf{S}(\hat{t})\mathbf{b} = 0$, e derivemos uma contradição. Como

$$\mathbf{S}'(t)\mathbf{b} = A(t)\mathbf{S}(t)\mathbf{b}\ ,$$

Considerando $\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{b}$ então das equações anteriores:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(\hat{t}) = \mathbf{S}(\hat{t})\mathbf{b} = 0 \end{cases}$$

Por unicidade de solução deste PVI, $\mathbf{y}(t) \equiv 0$. Conclui-se então que $\mathbf{S}(t)\mathbf{b} = 0$ para todo o $t \in I$, pelo que $\mathbf{S}(t)$ é singular para todo o $t \in I$; logo, em particular, também $\mathbf{S}(t_0)$ é singular, o que contradiz a hipótese. $\square$

Como corolário da proposição anterior, obtemos:

Teorema (Matriz Solução Fundamental): $\mathbf{S}(t)$ é uma matriz solução fundamental da equação (1.32) se e só se é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{S}' = A(t)\mathbf{S} \\ \mathbf{S}(0) = S_0 \end{cases}$$

para alguma matriz não singular, $S_0 \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo 2: Para obter uma matriz solução fundamental, $\mathbf{S}(t)$, da equação $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$, podemos resolver os n problemas

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{e}_i \end{cases} \qquad \text{com} \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

onde $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_n$ são os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^n$. As colunas de $\mathbf{S}(t)$ serão as soluções desses n problemas.

Resulta da definição que a matriz $\mathbf{S}(t)$ é invertível para todo o t. Sendo assim

$$0 = \frac{d}{dt}\Big(\mathbf{S}(t)\,\mathbf{S}^{-1}(t)\Big) = \mathbf{S}'(t)\,\mathbf{S}^{-1}(t) + \mathbf{S}(t)\,\frac{d}{dt}\Big(\mathbf{S}^{-1}(t)\Big),$$

pelo que $\mathbf{S}(t)\,\frac{d}{dt}\big(\mathbf{S}^{-1}(t)\big) = -\mathbf{S}'(t)\,\mathbf{S}^{-1}(t)$. Desta forma:

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathbf{S}^{-1}(t)\Big) = -\mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{S}'(t)\,\mathbf{S}^{-1}(t)$$

Atendendo a que $\mathbf{S}'(t) = A(t)\mathbf{S}(t)$ implica $A(t) = \mathbf{S}'(t)\mathbf{S}^{-1}(t)$, então a inversa da matriz solução fundamental verifica:

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathbf{S}^{-1}(t)\Big) = -\mathbf{S}^{-1}(t)A(t) \tag{1.34}$$

Caracterização das Soluções da Equação Homogénea

Teorema: Considere-se $I \subset \mathbb{R}$ e $A(t) = \Big[a_{ij}(t)\Big]_{i,j=1}^{n}$, com $a_{ij}(t) : I \to \mathbb{R}$ contínuas, e o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{1.35}$$

onde $t_0 \in I$ e $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. Seja $\mathbf{S}(t)$ uma matriz solução fundamental da equação diferencial. Então o problema (1.35) tem uma única solução dada por $\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0$. Além disso, as soluções da equação diferencial formam um espaço vectorial de dimensão n, sendo uma sua base constituída pelas colunas de $S(t)$; ou seja, a sua solução geral é:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(t)C \qquad \text{com} \qquad C = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$$

Demonstração: Seja $\mathbf{y}(t)$ uma solução arbitrária da equação $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ e considere-se $\mathbf{z}(t) = S^{-1}(t)\mathbf{y}(t)$. Queremos mostrar que $\mathbf{z}(t)$ é constante. Então, usando a equação (1.34):

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= \big(\mathbf{S}^{-1}(t)\big)'\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{y}'(t) \\ &= -\mathbf{S}^{-1}(t)A(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{y}'(t) \\ &= \mathbf{S}^{-1}(t)\Big(\mathbf{y}'(t) - A(t)\mathbf{y}(t)\Big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Temos então que $S^{-1}(t)\mathbf{y}(t) = z(t) = C$, com $C \in \mathbb{R}^n$, o que nos permite concluir que:

(1) a solução geral da equação diferencial é $\mathbf{y}(t) = S(t)C$;

(2) se $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ então $C = S^{-1}(t_0)\mathbf{y}(t_0) = S^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0$, pelo que a solução do PVI (1.35) é $\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0$.

$\square$

1.4.3 Equações vectoriais Lineares — Caso Não Homogéneo

Dada uma matriz solução fundamental de $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$, pretendemos obter as soluções da equação não homogénea $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$

Teorema (Fórmula de Variação das Constantes): Sendo $A = \Big[a_{ij}(t)\Big]_{i,j=1}^{n}$, com componentes $a_{ij} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas, $\mathbf{b} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ também contínua, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{S}(t)$ uma matriz solução fundamental de $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$, então a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{1.36}$$

é dada pela *fórmula de variação das constantes*:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 + \mathbf{S}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{S}^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds \tag{1.37}$$

Demonstração: Escrevendo a equação diferencial (1.36) na forma $\mathbf{y}' - A(t)\mathbf{y} = \mathbf{b}(t)$, e multiplicando ambos os membros por $\mathbf{S}^{-1}(t)$, obtém-se:

$$\mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{y}' - \mathbf{S}^{-1}(t)A(t)\mathbf{y} = \mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{b}(t)$$

Atendendo a que $\Big(S^{-1}(t)\Big)' = -\mathbf{S}^{-1}(t)A(t)$ (equação (1.34)), resulta pois que

$$\mathbf{S}^{-1}(t)\,\mathbf{y}' + \Big(S^{-1}(t)\Big)'\mathbf{y} = \mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{b}(t),$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}\Big(S^{-1}(t)\mathbf{y}(t)\Big) = \mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{b}(t) \tag{1.38}$$

Integrando entre t_0 e t, e considerando que $\mathbf{y}(t_0) = y_0$, temos que:

$$\mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{y}(t) - \mathbf{S}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{S}^{-1}(s)\mathbf{b}(s)\,ds$$

Multiplicando agora à esquerda por $\mathbf{S}(t)$ obtém-se:

$$\mathbf{y}(t) - \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 = \mathbf{S}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{S}^{-1}(s)\mathbf{b}(s)\,ds.$$

□

Corolário (Fórmula de Variação das Constantes para a Solução Geral): Nas mesmas condições do teorema anterior, a solução geral da equação

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$$

é dada por:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(t)C + \mathbf{S}(t)\int^{t} \mathbf{S}^{-1}(s)\mathbf{b}(s)\,ds \quad , \quad C \in \mathbb{R}^n; \tag{1.39}$$

(onde $\int^t \mathbf{x}(s)ds$ representa uma primitiva da função vectorial $\mathbf{x}(t)$).

Demonstração: Repita a prova do teorema anterior, primitivando ambos os membros da igualdade (1.38) em vez de os integrar entre t_0 e t (exercício). Note que a constante de primitivação, C, pertence a $\mathbb{R}^n$. $\square$

1.4.4 Equações Vectoriais Lineares de Coeficientes Constantes

A equação vectorial linear denomina-se *de coeficientes constantes* se a matriz $A(t)$ tiver entradas constantes, isto é, se for da forma

$$\begin{cases} y_1'(t) &= a_{11}\, y_1(t) + \ldots + a_{1n}\, y_n(t) + b_1(t) \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1}\, y_1(t) + \ldots + a_{nn}\, y_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

ou, na forma vectorial,

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t), \tag{1.40}$$

sendo

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

Caso Homogéneo

Tal como anteriormente, o caso homogéneo corresponde a tomar $\mathbf{b}(t) \equiv 0$ na equação (1.40). Vamos assim estudar a equação

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) \tag{1.41}$$

onde $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$ e $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$ com $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Exponencial de uma Matriz

Dados uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, convenciona-se que:

$$A^0 \overset{\text{def}}{=} I,$$

onde I representa a matriz identidade de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Recordamos o problema de valor inicial escalar,

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

tem por única solução $y(t) = e^{at}$. Procedendo por analogia, definimos a exponencial de tA, que denotamos por e^{tA}, da forma que se segue.

Definição (Exponencial de uma Matriz): Seja $t \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então e^{At} é a (única) matriz solução fundamental de (1.41) que é igual à matriz identidade em $t = 0$. Isto equivale a dizer que $X(t) = e^{At}$ é a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = I \end{cases} \tag{1.42}$$

Resulta imediatamente da definição anterior que:

Proposição: Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{S}$ é uma matriz solução fundamental de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ então:

$$e^{tA} = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(0)$$

Exemplo 3: No exemplo 1 desta secção (resolução da equação diferencial (1.33)), a solução também pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{2}e^{-t} + c_2 e^t \\ c_1 e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & \frac{1}{2}e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}_1(t)C$$

pelo que $\mathbf{S}_1(t)$ é também uma matriz solução fundamental. (A verificação é óbvia). Uma outra matriz solução fundamental é:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^t & \frac{e^{-t}-e^t}{2} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Note que a exponencial da matriz tA, $\mathbf{X}(t)$, tem uma propriedade importante — é a *única matriz solução fundamental que verifica* $\mathbf{X}(0) = I$.

Solução do Problema de Valor Inicial da Equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$

Teorema (Solução de uma equação vectorial linear homogénea de coeficientes constantes)
Se $A = [a_{i,j}]$ é uma matriz $n \times n$, com $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

tem solução única, dada por:

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0 \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Além disso, as soluções da equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ formam um espaço vectorial de dimensão n, sendo dadas por $\mathbf{y}(t) = e^{At}C$, onde $C \in \mathbb{R}^n$.

Diagonalização de A e o cálculo e^{At}

Uma matriz $n \times n$ A, com $n \in \mathbb{N}$, diz-se *diagonalizável* se admite n vectores próprios linearmente independentes. Sendo λ um valor próprio de A, recordamos que:

a) A *multiplicidade algébrica de* λ, $m_a(\lambda)$ é o número de vezes que o factor $(r-\lambda)$ ocorre na factorização do polinómio característico $p(r) = \det(A - rI)$.

b) A *multiplicidade geométrica de* λ, $m_g(\lambda)$ é o número de vectores próprios de A linearmente independentes associados a λ; Note que $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Então a matriz A é diagonalizável se e só se $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ para qualquer valor próprio, λ, de A. No caso particular de A admitir n valores próprios distintos, então A é necessariamente diagonalizável. Se A tem pelo menos um valor próprio, λ, com multiplicidade algébrica $m_a(\lambda) > 1$ e $m_g(\lambda) < m_a(\lambda)$, então a matriz A não é diagonalizável.

Para obter soluções linearmente de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ a partir dos valores e vectores próprios de A necessitamos de estender a função exponencial ao conjunto dos números complexos.

Exponencial Complexa

Para $z = \operatorname{Re} z + \mathrm{i} \operatorname{Im} z \in \mathbb{C}$, define-se a *exponencial complexa* de z por

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z}\Big(\cos(\operatorname{Im} z) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\Big)$$

isto é, se $z = x + \mathrm{i}y$

$$e^z = e^x e^{\mathrm{i}y} = e^x\big(\cos y + \mathrm{i}\operatorname{sen} y\big)$$

A exponencial complexa é uma extensão da exponencial real ao plano complexo. O domínio da exponencial complexa é $\mathbb{C}$, e

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y \quad , \quad \operatorname{Im} e^z = e^x \operatorname{sen} y \quad , \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \quad , \quad \arg e^z = \operatorname{Im} z$$

Desta forma podemos observar que as imagens por $f(z) = e^z$ de complexos com parte real constante (rectas verticais) são complexos com módulo constante (circunferências centradas na origem) e a imagem de complexos com parte imaginária constante (rectas horizontais) são complexos com argumento constante (semi-rectas com origem em 0) — ver Figura 1.9.

Propriedades Elementares da Exponencial Complexa

- Para todos z, $w \in \mathbb{C}$,
$$e^{z+w} = e^z e^w$$

- Para todo $z \in \mathbb{C}$
$$e^{z+2k\pi\mathrm{i}} = e^z \qquad , \qquad k \in \mathbb{Z}$$
o que significa que a exponencial complexa é periódica de período $2\pi\mathrm{i}$.

- Para qualquer $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, a equação $e^z = w$ pode sempre ser resolvida e tem uma infinidade de soluções, que são dadas por:
$$e^z = w \quad \Leftrightarrow \quad z = \log|w| + \mathrm{i}(\arg w + 2k\pi) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}.$$

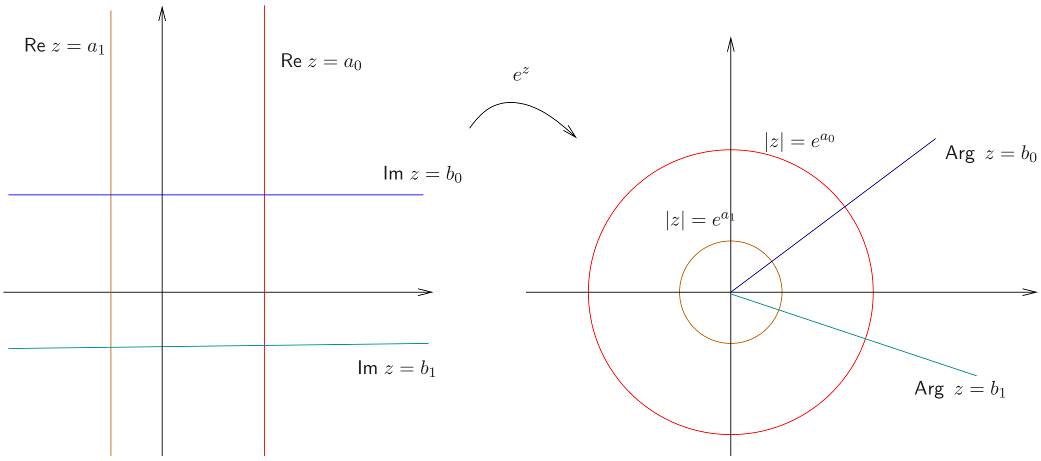

Figura 1.9: Transformação de rectas horizontais e verticais por $f(z) = e^z$.

Podemos agora obter soluções linearmente de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ a partir dos valores e vectores próprios de A, utilizando para tal a exponencial complexa.

Proposição: Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um valor próprio de A e $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ um vector próprio associado a λ então $\mathbf{y}(t) = e^{t\lambda}\mathbf{v}$ é uma solução da equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Além disso, $\mathbf{u} = \operatorname{Re}\mathbf{y}$ e $\hat{\mathbf{u}} = \operatorname{Im}\mathbf{y}$ são soluções reais de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Demonstração: Para provar a primeira parte, basta ver que:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{d}{dt}\big(e^{\lambda t}\mathbf{v}\big) = e^{\lambda t}\,\lambda\mathbf{v} = e^{\lambda t}A\mathbf{v} = A\big(e^{t\lambda}\mathbf{v}\big) = A\mathbf{y}(t).$$

Tendo em conta que

$$\mathbf{u}' + \mathrm{i}\hat{\mathbf{u}}' = (\mathbf{u} + \mathrm{i}\hat{\mathbf{u}})' = \mathbf{y}' = A\mathbf{y} = A(\mathbf{u} + \mathrm{i}\hat{\mathbf{u}}) = A\mathbf{u} + \mathrm{i}A\hat{\mathbf{u}},$$

tomando a parte real e a parte imaginária de ambos os membros desta igualdade obtém-se $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ e $\hat{\mathbf{u}}' = A\hat{\mathbf{u}}$. □

Se A for uma matriz $n \times n$ real diagonalizável, então existe um conjunto de n vectores próprios de A linearmente independentes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ forem os respectivos valores próprios associados, podemos construir uma matriz solução fundamental — e daí obter e^{At} — colocando nas colunas de $\mathbf{S}$ as soluções de $\mathbf{y}' = Ay$ dadas pela proposição anterior; isto é:

$$e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2, \ldots, e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n.$$

Note que $\mathbf{S}(0)$ é não singular.

Se λ for um valor próprio complexo de uma matriz real A, com vector próprio associado $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, então o procedimento anterior dá-nos uma matriz solução fundamental complexa; no entanto, podemos utilizar as funções reais $\operatorname{Re} e^{\lambda t}\mathbf{v}$ e $\operatorname{Im} e^{\lambda t}\mathbf{v}$, no lugar de $e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}$ e $e^{\bar{\lambda}_1 t}\bar{\mathbf{v}}$ [13]

[13] Se A é uma matriz real, então $\bar{A} = A$. Se $(\lambda, \mathbf{v})$ é um par valor próprio, vector próprio (complexo) de A, então $(\bar{\lambda}, \bar{\mathbf{v}})$ é também um par valor próprio, vector próprio de A, pois $A\bar{\mathbf{v}} = \bar{A}\bar{\mathbf{v}} = \overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$. Neste caso, $\operatorname{Re}\, e^{\bar{\lambda}t}\bar{\mathbf{v}} = \operatorname{Re}\, e^{\lambda t}\mathbf{v}$ e $\operatorname{Im}\, e^{\bar{\lambda}t}\bar{\mathbf{v}} = -\operatorname{Im}\, e^{\lambda t}\mathbf{v}$. Por cada par de vectores próprios conjugados, $\mathbf{v}$ e $\bar{\mathbf{v}}$, produzem-se desta forma duas (não quatro!) funções reais linearmente independentes, $\operatorname{Re}\, e^{\lambda t}\mathbf{v}$ e $\operatorname{Im}\, e^{\lambda t}\mathbf{v}$.

Exemplo (retrato de fase de uma equação diferencial): Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vamos calcular uma matriz solução fundamental associada a $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ começando por calcular os valores próprios de A:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff (3-\lambda)(-1-\lambda) - 5 = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \iff \lambda = 4 \vee \lambda = -2$$

Conclui-se de imediato que a matriz A é diagonalizável. Como tal, vamos calcular os seus dois vectores próprios.

- Para $\lambda = 4$ o vector próprio associado é uma solução não nula de

  $$(A - 4I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff v_1 - 5v_2 = 0$$

  Então podemos escolher (por exemplo) $v_2 = 1$; o vector próprio associado a 4 será $\mathbf{v} = (5, 1)$.

- Para $\lambda = -2$ o vector próprio associado é uma solução não nula de

  $$(A + 2I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff v_1 + v_2 = 0$$

  Então podemos escolher (por exemplo) $v_2 = 1$; o vector próprio associado a -2 será $\mathbf{w} = (-1, 1)$.

Como tal, a matriz

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} & e^{4t} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

é uma matriz solução fundamental associada à equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Dado que

$$S(0) = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

não é a matriz identidade, tem-se que

$$\begin{aligned} e^{At} = S(t)S^{-1}(0) &= -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -e^{-2t} & 5e^{4t} \\ e^{-2t} & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -e^{-2t} - 5e^{4t} & 5e^{-2t} - 5e^{4t} \\ e^{-2t} - e^{4t} & -5e^{-2t} - e^{4t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

isto é

$$e^{At} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} e^{-2t} + 5e^{4t} & -5e^{-2t} + 5e^{4t} \\ -e^{-2t} + e^{4t} & 5e^{-2t} + e^{4t} \end{bmatrix}$$

Para o estudo qualitativo de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ é importante calcular as soluções do problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \quad , \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \tag{1.43}$$

para alguns valores especiais de $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^2$. Comecemos por analisar a solução de (1.43) quando $\mathbf{y}_0 = (0,0)$. Neste caso, a solução do sistema é constante e igual a $(0,0)$, pelo que a origem é, precisamente, o único ponto de equilíbrio do sistema.

Escolhendo um ponto inicial $\mathbf{y}_0 = (-5,-1)$ (que pertence ao espaço próprio associado ao valor próprio 4) então

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}_0 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} e^{-2t}+5e^{4t} & -5e^{-2t}+5e^{4t} \\ -e^{-2t}+e^{4t} & 5e^{-2t}+e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5e^{4t} \\ -e^{4t} \end{bmatrix} = -e^{4t}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escrevendo $\mathbf{y}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ obtemos as equações paramétricas da solução de (1.43)

$$\begin{cases} x(t) = -5e^{4t} \\ y(t) = -e^{4t} \end{cases}$$

Por eliminação do parâmetro t obtém-se a equação cartesiana da solução, que é o conjunto dos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x = 5y$. Isto diz-nos que quando a condição inicial pertence ao espaço próprio de $\lambda = 4$, a solução do (1.43) nele permanecerá para todo o t. Mais se observa que, e como neste caso

$$\lim_{t\to+\infty} e^{4t} = +\infty\,, \tag{1.44}$$

a solução do PVI afasta-se do ponto de equilíbrio quando $t \to +\infty$.

Escolhendo um ponto inicial $\mathbf{y}_0 = (-1,1)$ (que pertence ao espaço próprio associado ao valor próprio -2) então

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}_0 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} e^{-2t}+5e^{4t} & -5e^{-2t}+5e^{4t} \\ -e^{-2t}+e^{4t} & 5e^{-2t}+e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $\mathbf{y}(t) = (x(t), y(t))$, obtemos assim as equações paramétricas da solução do (1.43)

$$\begin{cases} x(t) = -e^{-t} \\ y(t) = e^{-t} \end{cases}$$

Por eliminação do parâmetro t obtém-se a equação cartesiana da solução, que é o conjunto dos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x = -y$. Isto diz-nos que quando a condição inicial pertence ao espaço próprio de $\lambda = -2$, a solução do (1.43) nele permanecerá para todo t. Mais se observa que, e como nesse caso

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0\,, \tag{1.45}$$

a solução do PVI aproxima-se do ponto de equilíbrio quando $t \to +\infty$. Devido a (1.44) e (1.45), dizemos que a origem é um *ponto de sela*.

Em qualquer outra situação, a solução não é constante nem está confinada a uma recta. Por exemplo, se $\mathbf{y}_0 = (1,1)$, a solução de (1.43) é dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}_0 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} e^{-2t}+5e^{4t} & -5e^{-2t}+5e^{4t} \\ -e^{-2t}+e^{4t} & 5e^{-2t}+e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2e^{-t}+5^{4t} \\ 2e^{-t}+e^{4t} \end{bmatrix}$$

Fazendo $\mathbf{y}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, obtemos as equações paramétricas da solução do (1.43)

$$\begin{cases} 3x(t) = -2e^{-t}+5e^{4t} \\ 3y(t) = 2e^{-t}+e^{4t} \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro t, a equação cartesiana da solução no espaço (x, y) fica

$$x + y = 2\Big(\frac{4}{5x - y}\Big)^2.$$

De um modo geral, se $\mathbf{y}_0 = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0, 0)\big\}$, a solução de (1.43) é dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}_0 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} e^{-2t} + 5e^{4t} & -5e^{-2t} + 5e^{4t} \\ -e^{-2t} + e^{4t} & 5e^{-2t} + e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \delta e^{-t} - 5\gamma e^{4t} \\ \delta e^{-t} + \gamma e^{4t} \end{bmatrix}$$

em que, para facilitar a escrita, fizémos $\gamma = \alpha + \beta$ e $\delta = -\alpha + 5\delta$. Fazendo $\mathbf{y}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, obtemos as equações paramétricas da solução de (1.43)

$$\begin{cases} 6x(t) = \delta e^{-t} - 5\gamma e^{4t} \\ 6y(t) = \delta e^{-t} + \gamma e^{4t} \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro t, a equação cartesiana da solução fica

$$x + y = \frac{\gamma\delta^2}{\big((6 + 5\gamma)x + 5\gamma y\big)^2}.$$

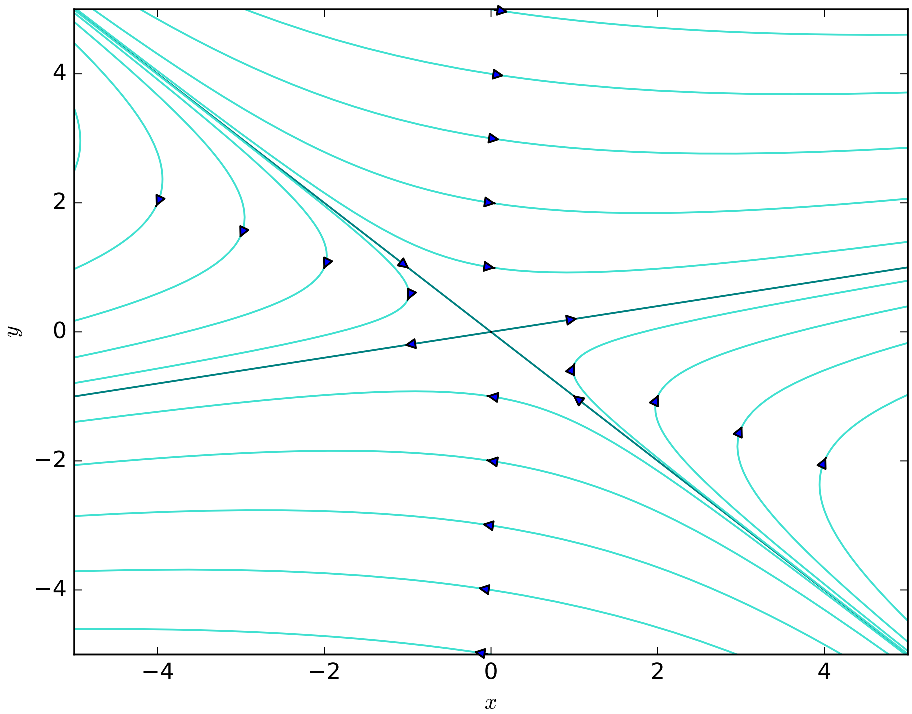

Figura 1.10: O *Retrato de fase* da equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ é o gráfico das equações cartesianas de várias soluções de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, no espaço dos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. As setas indicam o sentido em que as curvas são percorridas (t crescente).

A figura 1.10 representa o gráfico das curvas, no espaço dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que resultam das soluções da equação linear homogénea $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ após eliminação da variável t. Este tipo de representação gráfica das soluções é comunmente designado por *retrato de fase* da equação diferencial, sendo uma forma muito prática de visualizar o comportamento qualitativo das suas soluções.

1.4.5 Série da Exponencial de uma Matriz

Para encontrar um desenvolvimento em série para a exponencial de At, procuremos uma solução da equação (1.42) através das iteradas de Picard:

$$\begin{aligned} X_0(t) &= I \\ X_{n+1}(t) &= I + \int_{t_0}^{t} AX_n(s)\,ds \qquad \text{para} \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Calculando as primeiras 3 iterações, obtém-se:

$$\begin{aligned} X_0(t) &= I \\ X_1(t) &= I + \int_{t_0}^{t} A\,ds \;=\; I + tA \\ X_2(t) &= I + \int_{t_0}^{t} (A + sA^2)\;ds \;=\; I + \int_{t_0}^{t} A\,ds + \int_{t_0}^{t} sA^2\,ds \;=\; I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 \\ X_3(t) &= I + \int_{t_0}^{t} \left(A + sA^2 + \frac{s^2}{2}A^3\right) ds = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 \end{aligned}$$

Resulta então que[14]:

$$X_n(t) = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k$$

Isto sugere que a forma da solução de (1.42) é o "limite" da expressão anterior, ou seja:

$$X(t) = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k\;.$$

Esta fórmula é análoga à que define a série de Maclaurin da função exponencial, $e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!}$, para $a, t \in \mathbb{R}$. No nosso caso trata-se de uma série de potências de matrizes onde, em cada termo, aparece tA no lugar de ta. Isto leva-nos a conjecturar o seguinte:

Teorema (Série da Exponencial de uma Matriz): Sendo A uma matriz $n \times n$ de componentes reais e $t \in \mathbb{R}$, a exponencial de tA, e^{tA}, é dada por:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots \qquad (1.46)$$

[14]Pode-se facilmente provar este resultado por indução. No entanto, neste contexto isso será desnecessário, pois estamos apenas a usar as iteradas de Picard para formular uma conjectura cuja veracidade será depois comprovada por outro método.

Além disso, a série (1.46) converge uniformemente para t em intervalos do tipo $[-R, R]$ (para qualquer $R > 0$) e verifica $Ae^{At} = e^{At}A$, para todo o $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Para provar este teorema, precisaremos em primeiro lugar de saber produzir estimativas de matrizes. Sendo $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$, consideramos:

$$\|A\| = n \max_{i,j=1,\ldots,n} |a_{ij}| \, .$$

Note que qualquer componente a_{ij} de A verifica:

$$|a_{ij}| \leq \frac{1}{n} \|A\|. \tag{1.47}$$

De facto, esta função tem as propriedades de uma norma [15]; mas vamos aqui provar apenas a propriedade de $\|A\|$ de que efectivamente precisamos.

Se $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ é outra matriz real, então as componentes do produto AB verificam:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \, |b_{ik}| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}\|A\|\|B\| = \frac{1}{n}\|A\|\|B\|$$

Ou seja, o módulo de cada componente de AB é majorado pelo mesmo valor: $\frac{1}{n} \|A\|\|B\|$. Desta forma:

$$\|AB\| \leq n \left(\frac{1}{n}\|A\|\|B\|\right) = \|A\|\|B\|$$

Pela desigualdade anterior, $\|A^k\| \leq \|A\|\|A^{k-1}\| \leq \|A\|^2\|A^{k-2}\| \leq \cdots \leq \|A\|^k$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$. Como também $\|A^0\| = \|I\| = 1 = \|A\|^0$, resulta pois que:

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \qquad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.48}$$

Passamos agora à demonstração da convergência da série. Para tal, basta provar que todas as componentes da soma da série (1.46) existem (em $\mathbb{R}$).

Sendo $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, e denotando cada componente (i, j) de A^k por $a_{ij}^{(k)}$, então as componentes de e^{At} são as somas das séries reais [16]:

$$\delta_{ij} + ta_{i,j} + \frac{t^2}{2!}a_{ij}^{(2)} + \cdots + \frac{t^k}{k!}a_{ij}^{(k)} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}a_{ij}^{(k)} \qquad \text{com} \quad i, j = 1, 2, \ldots n. \tag{1.49}$$

Vamos agora provar a convergência uniforme destas séries, para t num intervalo do tipo $[-R, R]$, com $R > 0$. Para $|t| \leq R$, e usando (1.47) e (1.48), podemos majorar cada um dos termos das séries anteriores como se segue:

$$\left|\frac{t^k}{k!}a_{ij}^{(k)}\right| = \frac{|t|^k}{k!} \left|a_{ij}^{(k)}\right| \leq \frac{R^k}{k!} \left|a_{ij}^{(k)}\right| \leq \frac{R^k}{k!} \frac{\|A^k\|}{n} \leq \frac{R^k}{k!} \frac{\|A\|^k}{n} = \frac{\left(\|A\|R\right)^k}{n \, k!}$$

[15] É fácil provar que para quaisquer duas matrizes reais, A, B, de dimensão $n \times n$, se tem: **(a)** $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$; **(b)** $\|cA\| = |c| \, \|A\|$, para $c \in \mathbb{R}$; **(c)** $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$; **(d)** $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

[16] O símbolo δ_{ij}, designado na literatura por delta de Kronecker, representa as componentes da matriz identidade. Note que $a_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$.

Como a série real

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\|A\|R)^k}{k!}$$

é convergente — a sua soma é $\frac{1}{n}e^{\|A\|R}$ — então, pelo critério de Weierstrass, as séries (1.49) convergem uniformemente para t em intervalos do tipo $[-R,R]$; isto vale para qualquer $R>0$. Em particular, as séries (1.49) convergem pontualmente para qualquer $t\in\mathbb{R}$. Isto prova que e^{tA} está bem definida por (1.46), é diferenciável em $\mathbb{R}$ e pode ser derivada termo a termo.

Usando o resultado anterior, podemos agora calcular a derivada de e^{tA}:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{tA} &= \frac{d}{dt}\left(I+tA+\frac{t^2}{2!}A^2+\frac{t^3}{3!}A^3+\cdots+\frac{t^n}{n!}A^n+\cdots\right)\\
&= 0+A+\frac{2t}{2!}A^2+\frac{3t^2}{3!}A^3+\cdots+\frac{nt^{n-1}}{n!}A^n+\cdots\\
&= A\left(I+tA+\frac{t^2}{2!}A^2+\frac{t^3}{3!}A^3+\cdots+\frac{t^n}{n!}A^n+\cdots\right) \;=\; A\,e^{tA}\\
&= \left(I+tA+\frac{t^2}{2!}A^2+\frac{t^3}{3!}A^3+\cdots+\frac{t^n}{n!}A^n+\cdots\right)A \;=\; e^{tA}\,A
\end{aligned}$$

Assim sendo:

$$\frac{d}{dt}e^{tA}=A\,e^{tA}=e^{tA}\,A$$

Note também que $e^{0A}=I$. Isto conclui a demonstração do teorema. □

Algumas propriedades de e^{At}

Dado $t\in\mathbb{R}$ e $A\in\mathcal{M}_{i,j=1}^{n}(\mathbb{R})$, listamos aqui algumas das propriedades de $e^{At}=e^{tA}$:

(a) $e^{\mathbf{0}}$ é a matriz identidade em $\mathbb{R}^n$;

(b) $S(t)=e^{At}$ é a única matriz solução fundamental de $\mathbf{y}'=A\mathbf{y}$ que verifica $S(0)=I$.

(c) e^{At} é uma função diferenciável em qualquer $t\in\mathbb{R}$ e:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right)=Ae^{At}=e^{At}A$$

(d) A matriz e^{At} é invertível para qualquer $t\in\mathbb{R}$ e

$$\left(e^{At}\right)^{-1}=e^{-At}$$

(e) Se A, B são quaisquer matrizes $n\times n$ verificando $AB=BA$, então:

$$e^{At}B=Be^{At}$$

(f) Se A, B são quaisquer matrizes $n\times n$ verificando $AB=BA$, então:

$$e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$$

Demonstração:

(d) Atendendo a que:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\,e^{-At}\right) = e^{At}Ae^{-At} + e^{At}(-A)e^{-At} = e^{At}Ae^{-At} - e^{At}Ae^{-At} = 0,$$

então $e^{At}\,e^{-At}$ é constante. Em particular:

$$e^{At}\,e^{-At} = e^{A\,0}\,e^{-A\,0} = I^2 = I.$$

(e) (Exercício)

(f) Considere $X(t) = e^{At}e^{Bt}$. Então $X(0) = I$ e (usando **(e)**):

$$X'(t) = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} = Ae^{At}e^{Bt} + Be^{At}e^{Bt} = (A+B)e^{At}e^{Bt} = (A+B)X(t).$$

Isto prova que $X(t) = e^{(A+B)t}$. □

1.4.6 Cálculo da Exponencial de uma Matriz

- **A é uma matriz diagonal:**

$$\text{Se} \quad A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & . & & \\ & & . & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ldots & 0 \\ & . & & \\ & & . & \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

- **A é uma matriz diagonalizável:**
  Uma matriz A, $n \times n$, diz-se *diagonalizável* se admite n vectores linearmente independentes. Demonstra-se que,

$$\text{se } A \text{ é diagonalizável então } A = S\Lambda S^{-1}$$

em que

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & . & & \\ & & . & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} | & \ldots & | \\ \mathbf{v_1} & \ldots & \mathbf{v_n} \\ | & \ldots & | \end{bmatrix}$$

sendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os valores próprios de A e $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ os correspondentes vectores próprios.

Proposição: Se A e B são matrizes $n \times n$ semelhantes, isto é, se existe uma matriz S não singular tal que $A = SBS^{-1}$ então:

$$e^{At} = Se^{Bt}S^{-1}$$

Dem.: Para qualquer $k \in \mathbb{N}$:

$$\left(SBS^{-1}\right)^k = \underbrace{(SB\overbrace{S^{-1})(S}^{I}B\overbrace{S^{-1})(S}^{I}B\cdot\cdots\cdot B\overbrace{S^{-1})(S}^{I}BS^{-1})}_{k \text{ vezes}} = SB^kS^{-1}.$$

Assim

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left(SBS^{-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left(SB^kS^{-1}\right) = S\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}B^k\right)S^{-1} = Se^{Bt}S^{-1}.$$

□

Podemos então concluir que, se A é diagonalizável, isto é, se

$$A = S\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ & . & & \\ & & . & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}S^{-1}$$

então

$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = S\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & ... & 0 \\ & . & & \\ & & . & \\ 0 & 0 & ... & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}S^{-1}$$

Observações:

- ◇ Como consequência dos teoremas anteriores, dado que a matriz e^{At} é uma matriz solução fundamental da equação $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$, a sua solução é da forma $\mathbf{y}(t) = e^{At}C$, com $C \in \mathbb{R}^n$. Atendendo a que $e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$, então

  $$\mathbf{y}(t) = Se^{\Lambda t}S^{-1}C \equiv Se^{\Lambda t}C_1$$

  pelo que a matriz $\mathbf{S}(t) = Se^{\Lambda t}$ é tambem uma matriz solução fundamental associada à equação. No entanto, a não ser que a matriz S seja a matriz identidade, $\mathbf{S}(t)$ não é a matriz e^{At}, visto que $\mathbf{S}(0)$ não é a matriz identidade.
- ◇ Dada qualquer matriz A, como vimos a matriz e^{At} é a única matriz solução fundamental associada à equação $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$, $\mathbf{S}(t)$, que verifica $\mathbf{S}(0) = I$.
- ◇ Conhecida qualquer matriz solução fundamental, $\mathbf{S}(t)$, associada à equação $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$, tem-se que

  $$e^{At} = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(0)$$

Exemplo 1

Determinar a solução do seguinte PVI:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = 3x - y \end{array}\right. \quad , \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podemos escrever a equação na forma matricial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

e já sabemos que a solução do PVI é dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}(0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>Cálculo de e^{At}</u>

Os valores próprios da matriz A são ± 2 (pelo que podemos concluir desde já que a matriz A é diagonalizável).

O vector próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 2$ é uma solução **não nula** da equação

$$(A - 2I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b$$

pelo que podemos escolher, por exemplo $v_1 = (1, 1)$.

O vector próprio associado ao valor próprio $\lambda_2 = -2$ é uma solução **não nula** da equação

$$(A + 2I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -3a$$

pelo que podemos escolher, por exemplo $v_2 = (1, -3)$. Assim teremos

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} S^{-1}$$

pelo que

$$\begin{aligned} e^{At} &= Se^{\Lambda t}S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3e^{2t} + e^{-2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ 3e^{2t} - 3e^{-2t} & e^{2t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculada a matriz e^{At}, a solução do PVI é $\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}(0)$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3e^{2t} + e^{-2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ 3e^{2t} - 3e^{-2t} & e^{2t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{2t} - e^{-2t} \\ e^{2t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Tal como foi observado, a matriz

$$Se^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ e^{2t} & -3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

é também uma matriz solução fundamental, pelo que poderíamos escrever a solução geral da equação

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ e^{2t} & -3e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

e, posteriormente, calcular as constantes c_1, c_2 de modo a que seja verificada a condição inicial. Na prática, isso corresponde a resolver o sistema de equações lineares, o que é equivalente a inverter $S(0)$ e multiplicar o resultado pelo valor inicial.

- **A é uma matriz não diagonalizável:**

  A matriz A $(n{\times}n)$ diz-se *não diagonalizável*, se A não admite n vectores próprios linearmente independentes. Neste caso, A não é semelhante a uma matriz diagonal, isto é, não existem uma matriz diagonal Λ e uma matriz não singular S tais que $A = S\Lambda S^{-1}$.

  Para determinar a matriz e^{At}, vamos precisar de algumas definições e resultados parciais.

Matriz Diagonal por Blocos

Uma matriz $n \times n$, é diagonal por blocos, se for da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & & & \mathbf{0} \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & A_k \end{bmatrix} \tag{1.50}$$

em que A_1,...,A_k são matrizes quadradas de dimensões $m_1 \times m_1$,..., $m_k \times m_k$, respectivamente, tendo-se $m_1 + ... + m_k = n$.

Exemplo:

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal por blocos A_1, A_2, A_3, em que

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exponencial de uma matriz diagonal por blocos

Se A é diagonal por blocos, como em (1.50), então

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{A_2 t} & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} & e^{A_k t} \end{bmatrix}$$

<u>Bloco de Jordan</u>

Uma matriz $k \times k$ diz-se um *bloco de Jordan* se for da forma

$$J_\lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$J_{-1}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad J_2^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad J_0^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Exponencial de um Bloco de Jordan</u>

Se J_λ é um bloco de Jordan de dimensão $k \times k$, então

$$e^{J_\lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots & & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}e^{\lambda t} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} \\ 0 & & & & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & & & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

isto é, os elementos a_{ij}, $i, j = 1, ..., k$ da matriz $e^{J_\lambda t}$ são da forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} e^{\lambda t} & \text{se } \ i = j & \text{(diagonal principal)} \\ te^{\lambda t} & \text{se } \ i+1 = j & \text{(diagonal acima da principal)} \\ \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \text{se } i = j+2 & \text{(2ª diagonal acima da principal)} \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t} & \text{se } \ i+k-1 = j & \text{((}k-1\text{) ésima diagonal acima da principal)} \\ & & \\ 0 & \text{se } \ i < j & \text{(abaixo da diagonal principal)} \end{cases}$$

Exemplo:

Para os blocos de Jordan do exemplo anterior tem-se que

$$\exp\left(J^2_{-1}t\right) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \exp\left(J^3_2 t\right) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$\exp\left(J^4_0 t\right) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exponencial de uma matriz não diagonalizável

Seja A uma matriz, $n \times n$, não diagonalizável. Demonstra-se que,

se A é não diagonalizável então $A = SJS^{-1}$

em que J é uma matriz diagonal por blocos de Jordan, isto é

$$J = \begin{pmatrix} J^{m_1}_{\lambda_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & J^{m_2}_{\lambda_2} & \mathbf{0} & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & J^{m_k}_{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

em que $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são valores próprios de A com multiplicidades algébricas $m_1, \ldots, m_k$, respectivamente, (multiplicidade enquanto raízes do polinómio característico) e multiplicidade geométrica 1 (cada valor próprio $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ tem um único vector próprio associado $v_1, \ldots, v_k$, respectivamente) [17].

[17] A lista de valores próprios, $\lambda_1, \ldots \lambda_k$, pode conter repetições. Nesse caso se, por exemplo, $\lambda_2 = \lambda_1$ (e $\lambda_j \neq \lambda_1$, para $j \geq 3$) então λ_1 tem dois vectores próprios associados linearmente independentes, v_1 e v_2 (multiplicidade geométrica igual a 2) e $m_1 + m_2$ é a multiplicidade algébrica de λ_1.

A matriz S é também formada por k "blocos" de colunas

$$S = \begin{bmatrix} | & . & . & . & | \\ S_1 & . & . & . & S_k \\ | & . & . & . & | \end{bmatrix}$$

em que, para $i = 1, ..., k$

$$S_i = \begin{bmatrix} | & | & . & . & | \\ v_i & v_i^{G_1} & . & . & v_i^{G_{m_i-1}} \\ | & | & . & . & | \end{bmatrix}$$

sendo v_i o vector próprio associado ao valor próprio λ_i, e $v_i^{G_j}$, $j = 1, ..., m_i - 1$, vectores próprios generalizados, i.e., verificando as equações

$$(A - \lambda_i I)v_i^{G_1} = v_i$$

$$(A - \lambda_i I)v_i^{G_2} = v_i^{G_1}$$

$$(A - \lambda_i I)v_i^{G_3} = v_i^{G_2} \ldots$$

até se calcularem $m_i - 1$ vectores próprios generalizados.

Exemplo:
Determinar e^{At} sendo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dado que a matriz não é nem diagonal, nem um bloco de Jordan (ou afim) nem diagonal por blocos, teremos que determinar e^{At} pelo processo usual de cálculo de valores e vectores próprios. Os valores próprios de A são as soluções de

$$\det(A - \lambda\, I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda + 2)^3 = 0$$

Tem-se então que -2 é o valor próprio de A com multiplicidade algébrica 3. Note-se que só depois de calcular a sua multiplicidade geométrica (número de vectores próprios linearmente independentes associado a -2) poderemos concluir se A é diagonalizável (se a multiplicidade geométrica for 3) ou não diagonalizável (se a multiplicidade geométrica for 2 ou 1). Os vectores próprios associados a -2 são as soluções <u>não nulas</u> de

$$(A + 2I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = c = 0 \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Então

$$v = (a, b, c) = (a, 0, 0) = a(1, 0, 0)$$

Conclui-se que a multiplicidade geométrica do valor próprio é 1, ou seja admite apenas um vector próprio independente, que por exemplo pode ser $v = (1, 0, 0)$. Sendo assim a matriz A é não diagonalizável, pelo que é semelhante a uma matriz formada por um único bloco de Jordan, ou seja:

$$A = SJS^{-1}$$

em que

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & | & | \\ 0 & v_1 & v_2 \\ 0 & | & | \end{bmatrix}$$

sendo v_1 e v_2 vectores próprios generalizados de v. O primeiro vector próprio generalizado é solução <u>não nula</u> de

$$(A+2I)v_1 = v \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = 1 \\ b = -1 \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Então

$$v_1 = (a,b,c) = (a,-1,1) = a(1,0,0) + (0.-1,1)$$

Podemos então escolher, por exemplo, $v_1 = (0.-1,1)$. O segundo vector próprio generalizado é solução <u>não nula</u> de

$$(A+2I)v_2 = v_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = 0 \\ b = 1 \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Então

$$v_1 = (a,b,c) = (a,1,0) = a(1,0,0) + (0.1,0)$$

Podemos então escolher, por exemplo, $v_2 = (0.1,0)$. Em consequência

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por ser um bloco de Jordan tem-se que

$$e^{Jt} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e finalmente

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & -t+1 & -t \\ 0 & t & t+1 \end{bmatrix}$$

Caso Não Homogéneo

Vamos agora resolver a equação

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(\mathbf{t}) \tag{1.51}$$

com $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $A = \Big[a_{ij}\Big]_{i,j=1}^{n}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{b} : \mathbf{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$.

Fórmula da Variação das Constantes:

(Existência e unicidade de solução de uma equação vectorial linear de coeficientes constantes)

Aplicando a fórmula (1.39), concluímos que a solução geral da equação (1.51) é dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}C + e^{At}\int^t e^{-As}\,\mathbf{b}(s)\,ds \quad , \quad C \in \mathbb{R}^n$$

Se adicionalmente for dada a condição inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, a solução do PVI será neste caso dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0 + e^{At}\int_{t_0}^t e^{-As}\,\mathbf{b}(s)\,ds$$

para todo $t \in I$.

Exemplo:

Determinar a solução do PVI

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \quad , \quad \mathbf{y}(0) = (1, -1, 0)$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Recorrendo ao resultado do exemplo anterior

$$e^{At} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & -t+1 & -t \\ 0 & t & t+1 \end{bmatrix}$$

e aplicando a fórmula da variação das constantes, a solução do PVI é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= e^{At}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{At}\int_0^t e^{-As}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2s} \end{bmatrix} ds \\
&= e^{At}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{2s}\begin{bmatrix} 1 & \frac{s^2}{2} & -s + \frac{s^2}{2} \\ 0 & s+1 & s \\ 0 & -s & -s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2s} \end{bmatrix} ds\right) \\
&= e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & -t+1 & -t \\ 0 & t & t+1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{e^{2t}-1}{2} - t^2 + \frac{t^3}{3} \\ t^2 \\ -t^2 + 2t \end{bmatrix}\right) \\
&= e^{-2t}\begin{bmatrix} \frac{e^{2t}+3}{2} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \\ -t^2 + t - 1 \\ t^2 + t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

1.5 Equações Lineares de Ordem n

Uma equação diferencial ordinária de ordem n tem a forma:

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)\right)$$

Uma solução desta equação é uma função $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n que a satisfaz. Aqui, $I \subset \mathbb{R}$ denota um intervalo aberto.

Uma equação de ordem $n \in \mathbb{N}$ diz-se *linear* se é da forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + ... + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b(t) \tag{1.52}$$

onde $a_0(t)$, $a_1(t)$,..., $a_{n-1}(t)$ e $b(t)$ são funções reais definidas e contínuas em I.

1.5.1 Equação linear de 2ª ordem

Como exemplo introdutório deste tópico, estudamos agora o caso especial das equações lineares de 2ª ordem:

$$\ddot{y} + a_1(t)\, \dot{y} + a_0(t)\, y = b(t) \tag{1.53}$$

Fazendo $\dot{y} = v$ (o que implica que $\dot{v} = \ddot{y}$), verificamos que a equação (1.53) é equivalente ao sistema de duas equações de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \dot{y} &= v \\ \dot{v} &= -a_0(t)\, y - a_1(t)\, v + b(t) \end{cases}$$

Este sistema pode-se escrever da seguinte forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'}_{\dot{\mathbf{y}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{bmatrix}}_{A(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}(t)}$$

ou seja,

$$\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{h}(t),$$

em que $A(t)$ se designa por **matriz companheira** da equação (1.53).

A equação linear *homogénea* de 2ª ordem é a equação (1.53) no caso especial $b(t) = 0$, isto é:

$$\ddot{y} + a_1(t)\, \dot{y} + a_0(t)\, y = 0 \tag{1.54}$$

Como vimos, esta equação é equivalente a:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'}_{\dot{\mathbf{y}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{bmatrix}}_{A(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}}$$

Aplicando agora a teoria, apresentada na secção anterior, das equações vectoriais lineares, a solução geral de $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$ é dada por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ \dot{u}_1 & \dot{u}_2 \end{bmatrix}}_{W(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{C}$$

com $C = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. A função matricial

$$W(t) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ \dot{u}_1 & \dot{u}_2 \end{bmatrix}$$

designa-se por **matriz wronskiana** de (1.54). $W(t)$ é uma matriz solução fundamental da equação vectorial de 1ª ordem equivalente, logo as suas colunas, que são sempre da forma $(y, \dot{y})$ [18], são soluções linearmente independentes do sistema.

Desta forma, as soluções da eq. (1.54) são dadas por

$$y(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t), \qquad \text{com} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

onde $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são duas soluções linearmente independentes de (1.54) [19]. Isto significa que as soluções de (1.54) formam um espaço vectorial de dimensão 2. Desta forma, é válido o seguinte resultado:

Princípio da Sobreposição de Soluções
Se $u(t)$ e $v(t)$ são soluções (reais ou complexas) da equação homogénea

$$\ddot{y} + a_1(t)\,\dot{y} + a_0(t)\,y = 0,$$

então $c_1 u(t) + c_2 v(t)$ é também solução de (1.54), para quaisquer constantes (reais ou complexas) c_1, c_2.

1.5.2 Equação linear de 2ª ordem de coeficientes constantes

Estudemos agora a equação (1.54) no caso em que os coeficientes são constantes, ou seja:

$$\ddot{y} + a_1\,\dot{y} + a_0\,y = 0 \qquad \text{com} \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R} \tag{1.55}$$

O *polinómio característico* desta equação diferencial é definido por:

$$P(r) = r^2 + a_1 r^1 + a_0 r^0 = r^2 + a_1 r + a_0$$

As raízes de $P(r)$ são os valores (reais ou complexos):

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}\right)$$

Consoante o tipo de raízes, há três casos possíveis:

Caso 1: **duas raízes reais distintas** se $a_1^2 - 4a_0 > 0$.

Caso 2: **uma raiz real dupla** se $a_1^2 - 4a_0 = 0$.

Caso 3: **duas raízes complexas conjugadas** se $a_1^2 - 4a_0 < 0$.

[18] Note que $v = \dot{y}$ implica que as componentes da segunda linha de $W(t)$ são as derivadas das componentes da primeira linha.

[19] Caso contrário, e como u_1 e u_2 não podem ser funções nulas, teríamos $u_2 = c u_1$ (com $c \neq 0$), pelo que $\dot{u}_2 = c\dot{u}_1$. Resultaria então que $(u_1, \dot{u}_1) = c(u_2, \dot{u}_2)$, ou seja, as colunas de $W(t)$ seriam linearmente dependentes.

Denotando as raízes de $P(r)$ por λ_1 e λ_2, podemos factorizar o polinómio característico da seguinte forma:

$$P(r) = (r - \lambda_1)(r - \lambda_2) \qquad \text{ou} \qquad P(r) = (r - \lambda_1)^2 \quad \text{se} \ \lambda_1 = \lambda_2$$

Vamos agora definir o operador derivada, D, por $Dy = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y}$ [20]. Então a equação (1.55) pode-se escrever na forma

$$D^2 y + a_1 Dy + a_0 y = 0,$$

que é equivalente a:

$$\left(D^2 + a_1 D + a_0\right) y = 0$$

Eis algumas definições e propriedades relevantes dos operadores que iremos utilizar:

- D é um operador linear i.e. $D(cy_1 + dy_2) = c\,Dy_1 + d\,Dy_2$, onde c, d são escalares, $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)
- Soma dos operadores A e B: $(A + B)y = Ay + By$
- Produto de um operador A por um escalar c: $(cA)y = c(Ay)$
- Produto dos operadores A e B: $(AB)y = A(By)$; trata-se, de facto, da composição dos operadores A, B.

Notamos que o produto de operadores é, em geral, *não comutativo*. Por exemplo, os operadores D e $Ay = f(t)y(t)$

$$DAy = D(f(t)y(t) = f'(t)y(t) + f(t)y'(t)$$

$$ADy = A(Dy) = Ay' = f(t)y'(t)$$

Logo o operador $Ay = f(t)y(t)$ apenas comuta com D se $f'(t) = 0$, isto é, $Ay = cy$, onde c é uma constante.

Vejamos agora como proceder à factorização do *polinómio diferencial*

$$P(D) = D^2 + a_1 D + a_0.$$

Tendo em conta que

$$P(r) = r^2 + a_1 r + a_0 = (r - \lambda_1)(r - \lambda_2) \tag{1.56}$$

então $P(D)$ factoriza-se de forma análoga a $P(r)$:

$$P(D) = D^2 + a_1 D + a_0 = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)$$

Vejamos porquê. Usando a linearidade dos operadores e o facto de D comutar com o operador produto por uma constante, cI ($c \in \mathbb{R}$ ou $c \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned} (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) &= D(D - \lambda_2) - \lambda_1(D - \lambda_2) = D^2 - D\lambda_2 - \lambda_1 D + \lambda_1\lambda_2 \\ &= D^2 - \lambda_2 D \lambda_1 D + \lambda_1\lambda_2 = D^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)D + \lambda_1\lambda_2 \end{aligned}$$

[20] O operador derivada é, de facto, a aplicação $D : C^1(I) \to C(I)$ definida por $Dy = \dot{y}$, onde I é um intervalo aberto. Estas aplicações cujo domínio é um conjunto de funções reais (ou complexas) designam-se comunmente, na literatura matemática, por *operadores*.

Ora, os coeficientes do polinómio do 2º grau (1.56) verificam $a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ e $a_0 = \lambda_1\lambda_2$, pelo que

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) = D^2 + a_1 D + a_0.$$

A equação diferencial é pois equivalente a:

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = 0 \qquad \text{se} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

e a

$$(D - \lambda_1)^2 y = 0 \qquad \text{se} \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

Vejamos agora como usar a factorização do polinómio diferencial para determinar a solução geral da equação homogénea. Tendo em conta que $D - \lambda_1$ e $D - \lambda_2$ comutam [21]:

$$(D - \lambda_1)\underbrace{(D - \lambda_2)y}_{=0} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (D - \lambda_2)\underbrace{(D - \lambda_1)y}_{=0} = 0$$

Isto é, as soluções de $(D - \lambda_1)y = 0$ e de $(D - \lambda_2)y = 0$ são certamente soluções de (1.55).

Resolvendo então $(D - \lambda)y = 0$ (com $\lambda = \lambda_1$ ou $\lambda = \lambda_2$):

$$\dot{y} + \lambda y = 0 \qquad \text{uma solução é} \quad y(t) = e^{\lambda t}$$

No caso $\lambda_1 \neq \lambda_2$, obtêm-se *duas soluções linearmente independentes*:

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} \qquad \text{e} \qquad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

No caso $\lambda_1 = \lambda_2$, o procedimento anterior permite apenas encontrar uma solução linearmente independente de $(D - \lambda_1)^2 y = 0$: $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$.

Para obter uma segunda, escrevemos um sistema de equações equivalente à equação tomando $v = (D - \lambda_1)y$:

$$(D - \lambda_1)\underbrace{(D - \lambda_1)y}_{v} = 0$$

$$\begin{cases} (D - \lambda_1)v = 0 \\ (D - \lambda_1)y = v \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} v = e^{\lambda_1 t} \\ \dot{y} - \lambda_1 y = e^{\lambda_1 t} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} v = e^{\lambda_1 t} \\ y = te^{\lambda_1 t} \end{cases}$$

Assim, se $\lambda_1 = \lambda_2$, obtivémos estas *duas soluções* (que também são *linearmente independentes*):

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} \qquad \text{e} \qquad y_2(t) = te^{\lambda_1 t}$$

Como vimos anteriormente, o espaço de soluções da equação (1.55) tem dimensão 2, o que significa que a solução geral da mesma pode ser dada por:

Caso 1: $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Caso 2: $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Caso 3: $y(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t}$, com $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$. Note que, neste caso, esta fórmula representa o espaço vectorial das *soluções complexas* da equação (1.55).

[21] Isto é, $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) = (D - \lambda_2)(D - \lambda_1)$ (verifique).

No caso 3, e para obter uma fórmula para a solução geral real, notamos em primeiro lugar que $P(r)$ é um polinómio de coeficientes reais pelo que se $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ (onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são a parte real e a parte imaginária de λ_1) então $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - \mathrm{i}\beta$. Então:

$$e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t}\cos(\beta t) + ie^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$$

$$e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t}\cos(\beta t) - ie^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$$

Como $\operatorname{Re} e^{\lambda_1 t}$ e $\operatorname{Im} e^{\lambda_1 t}$ também são soluções de (1.55), então duas soluções *reais* linearmente independentes são,

$$u_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \qquad \text{e} \qquad u_2(t) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t).$$

Assim sendo:

Caso 3 (soluções reais): $y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1: resolver a equação $y'' - 4y = 0$.

Usando a notação $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma $(D^2 - 4)y = 0$. O polinómio característico associado à equação é $P(r) = r^2 - 4 = (r-2)(r+2)$. Então

$$\begin{aligned}(D^2 - 4)y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (D-2)(D+2)y = 0\\ &\Leftarrow \quad (D-2)y = 0 \ \text{ ou } \ (D-2)y = 0\end{aligned}$$

Assim, duas soluções linearmente independentes são e^{2t} e e^{-2t}, pelo que uma base do espaço de soluções de $(D-2)(D+2)y = 0$ é $< e^{2t}, e^{-2t} >$. Concluimos que a solução geral da equação $y'' - 4y = 0$ é $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2: resolver a equação $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Usando a notação $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma $(D^2 - 6D + 9)y = 0$. O polinómio característico associado à equação é $P(r) = r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2$. Então uma base do espaço de soluções de

$$(D^2 - 6D + 9)y = 0 \Leftrightarrow (D-3)^2 y = 0$$

é $< e^{3t}, te^{3t} >$, e a solução geral da equação $y'' - 6y' + 9y = 0$ é $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t}$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3: resolver a equação $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Usando a notação $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma $(D^2 + 2D + 2)y = 0$. O polinómio característico associado à equação é $P(r) = r^2 + 2r + 2 = (r + 1 - \mathrm{i})(r + 1 + \mathrm{i})$. Então uma base do espaço de soluções reais de

$$(D^2 - 2D + 2)y = 0 \Leftrightarrow (D + 1 - \mathrm{i})(D + 1 + \mathrm{i})y = 0$$

é $< e^t\cos t, e^t\operatorname{sen} t >$. Desta forma, a solução geral da equação $y'' + 2y' + 2 = 0$ é dada por $y(t) = c_1 e^t\cos t + c_2 e^t\operatorname{sen} t$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1.5.3 Equação linear de ordem n e equação vectorial equivalente

Regressamos ao estudo da equação linear de ordem n:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + ... + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b(t) \tag{1.57}$$

onde $a_0(t)$, $a_1(t)$,..., $a_{n-1}(t)$ e $b(t)$ são funções reais definidas e contínuas em I. Considera-se:

$$\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1}) \overset{\text{def}}{=} (y, y', y'', \ldots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)})$$

Tendo em conta a definição destas variáveis, então a equação (1.57) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} y_0' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ -a_0(t)\, y_0 - \cdots - a_{n-1}(t)\, y_{n-1} + b(t) \end{bmatrix}$$

Este sistema de equações de 1ª ordem pode-se escrever na forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}'}_{\mathbf{y}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{A(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}(t)}$$

onde $A(t)$ é a **matriz companheira** da equação (1.57). Assim, a equação de ordem n é equivalente à equação vectorial de 1ª ordem:

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{h}(t)$$

A solução geral de $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ é pois dada por:

$$\mathbf{y} = X(t)C$$

onde $X(t)$ é uma matriz solução fundamental de $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ e $C \in \mathbb{R}^n$.

Se $u_1, u_2, \ldots, u_n : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n-1} em I são linearmente independentes, define-se a **matriz wronskiana de** $u_1, u_2, \ldots, u_n$ por:

$$W = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Como as colunas de $X(t)$ são soluções linearmente independentes de $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$, então $X(t)$ é uma matriz solução fundamental de $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ **se e só se** $X(t)$ é uma matriz wronskiana de n soluções linearmente independentes de

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0$$

Esta última equação designa-se por *equação homogénea* associada a (1.57).

Determinemos agora uma fórmula para a solução geral da equação linear não homogénea (1.57). Se $y(t)$ é uma solução *arbitrária* de (1.57) e $y_P(t)$ uma solução particular da mesma equação então, pela linearidade dos operadores derivada:

$$\begin{aligned} & D^n(y-y_P)+a_{n-1}D^{n-1}(y-y_P)+a_1D(y-y_P)+a_0(y-y_P) \\ &= \underbrace{D^n y+a_{n-1}D^{n-1}y+a_1Dy+a_0y}_{=b(t)}-\big(\underbrace{D^n y_P+a_{n-1}D^{n-1}y_P+a_1Dy_P+a_0y_P}_{=b(t)}\big) \\ &= b(t)-b(t)=0 \end{aligned}$$

Isto significa que a diferença $y(t)-y_P(t)$ é uma solução da equação homogénea; o que sugere a solução geral da equação não homogénea (1.57) é da forma

$$y(t)=y_G(t)+y_P(t)$$

em que $y_G(t)$ é a solução geral da equação homogénea associada e $y_P(t)$ é uma *solução particular* da equação não homogénea. Ora

$$\begin{aligned} & D^n(y_G+y_P)+a_{n-1}D^{n-1}(y_G+y_P)+a_1D(y_G-y_P)+a_0(y_G-y_P) \\ &= \underbrace{D^n y_G+a_{n-1}D^{n-1}y_G+a_1Dy_G+a_0y_G}_{=0}+\underbrace{D^n y_P+a_{n-1}D^{n-1}y_P+a_1Dy_P+a_0y_P}_{=b(t)} \\ &= 0+b(t)=b(t) \end{aligned}$$

o que mostra que $y(t)=y_G(t)+y_P(t)$ é, de facto, a solução geral da equação não homogénea.

1.5.4 Solução geral da equação homogénea

Pode-se facilmente verificar (como acima, fica como exercício) a seguinte propriedade genérica das equações lineares homogéneas de ordem n (de coeficientes constantes) da forma

$$y^{(n)}+a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_1(t)\,y'+a_0(t)\,y=0 \tag{1.58}$$

Princípio da sobreposição de soluções: se $u(t)$ e $v(t)$ são duas soluções da equação $P(D)y=0$, então $c_1u(t)+c_2v(t)$ é também solução de $P(D)y=0$, para quaisquer constantes reais c_1 e c_2 (ou complexas) [22].

Isto sugere que a solução geral destas equações possa ser obtida a partir de uma combinação linear de soluções apropriadamente escolhidas. Como vimos, a equação (1.58) é uma equação de ordem n com $b(t)\equiv 0$ (isto é, homogénea), pelo que é equivalente a

$$\mathbf{y}'=A(t)\mathbf{y}$$

onde

$$A(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

[22] É de notar que esta propriedade é verificada por todas as equações lineares homogéneas (diferenciais ou de outro tipo).

é a matriz companheira de (1.58). Pela teoria das equações vectoriais lineares, o espaço de soluções da equação $X' = A(t)X$, tem dimensão n, pelo que existem n soluções linearmente independentes, X_1, ..., X_n. As funções X_1, ..., X_n são as colunas de uma matriz solução fundamental de $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ ou, equivalentemente, de uma matriz wronskiana de n soluções linearmente independentes da equação homogénea (1.58). Como tal, a solução geral de $X' = A(t)X$ é da forma

$$X(t) = c_1X_1(t) + \cdots + c_nX_n(t) \qquad , \qquad c_1, ...c_n \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}}_{X(t)} = c_1 \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{bmatrix}}_{X_1(t)} + c_2 \underbrace{\begin{bmatrix} y_2 \\ y_2' \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)} \end{bmatrix}}_{X_2(t)} + \cdots + c_n \underbrace{\begin{bmatrix} y_n \\ y_n' \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}}_{X_n(t)}$$

Dado que a solução da equação $P(D)y = 0$ é apenas a primeira componente de $X(t)$, ou seja, y, então a solução geral da equação homogénea $P(D)y = 0$ é uma combinação linear das primeiras componentes das funções vectoriais X_1, ..., X_n, ou seja, de $y_1, y_2, \cdots, y_n$.

Podemos então concluir que o espaço das soluções da equação

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0$$

tem dimensão n e que a sua solução geral é da forma

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + ... + \alpha_n y_n(t),$$

em que α_1, ... , α_n são constantes (reais ou complexas) e y_1,..., y_n são n soluções linearmente independentes da equação homogénea.

1.5.5 Equação homogénea de ordem n de coeficientes constantes

Consideremos agora a equação de ordem n de coeficientes constantes:

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = b(t)$$

onde $a_0, a_1, \ldots a_{n-1} \in \mathbb{R}$ e $b(t)$ é uma função real definida e contínua em I.

Tomando $b(t) \equiv 0$, obtém-se a equação homogénea associada:

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \tag{1.59}$$

Considerando, como anteriormente, o operador diferencial $D = \frac{d}{dt}$, podemos escrever (1.59) na forma

$$\underbrace{\left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0\right)}_{P(D)} y = 0$$

Define-se então o *polinómio característico* da equação (não homogénea ou homogénea) por:

$$P(R) = R^n + a_{n-1}R^{n-1} + \cdots + a_1 R + a_0$$

O seguinte resultado estabelece uma relação entre os valores próprios da matriz companheira, A, e as raízes do polinómio característico de (1.59):

Proposição: Os valores próprios da matriz companheira, A, da equação diferencial $y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = b(t)$ são as raízes do seu polinómio característico $P(R) = R^n + a_{n-1}R^{n-1} + \cdots + a_1 R + a_0$.

Demonstração: $\det(A - \lambda I) = \pm P(\lambda)$.

Este resultado sugere uma relação entre as raízes de $P(R)$ e as soluções da equação homogénea. Para obter essas soluções vamos recorrer à factorização de $P(R)$.

Admitindo que as raízes de $P(\lambda)$ são:

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \text{com multiplicidade} & m_1 \\ \lambda_2 & \text{com multiplicidade} & m_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_k & \text{com multiplicidade} & m_k \end{array}$$

então

$$P(R) = (R - \lambda_1)^{m_1}(R - \lambda_2)^{m_2} \cdots (R - \lambda_k)^{m_k},$$

onde, tendo em conta que o grau de $P(R)$ é n,

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n.$$

Tal como no caso das equações de ordem 2, o polinómio diferencial factoriza-se da mesma forma que $P(R)$:

$$P(D) = (D - \lambda_1)^{m_1}(D - \lambda_2)^{m_2} \cdots (D - \lambda_k)^{m_k}$$

Como $D - \lambda_i$ comuta com $D - \lambda_j$, pode-se trocar a ordem dos factores. Então as soluções de

$$(D - \lambda_j)^{m_j} y = 0 \qquad \text{com} \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

são soluções de $P(D)y = 0$.

Para $m_j = 1$, obtivémos a solução $e^{\lambda_j t}$.

No caso $m_j = 2$, obtivémos duas soluções linearmente independentes:

$$e^{\lambda_j t} \quad , \quad te^{\lambda_j t}$$

Para o caso geral, é útil o seguinte resultado.

Proposição: Sejam $k, m \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então, para $k < m$:

$$(D - \lambda)^m t^k e^{\lambda t} = 0$$

Demonstração:

$$(D - \lambda)t^k e^{\lambda t} = kt^{k-1}e^{\lambda t} + t^k \lambda e^{\lambda t} - \lambda t^k e^{\lambda t} = kt^{k-1}e^{\lambda t}$$

Iterando a fórmula anterior:

$$\begin{aligned} (D - \lambda)^m t^k e^{\lambda t} &= (D - \lambda)^{m-1} kt^{k-1} e^{\lambda t} \\ &= (D - \lambda)^{m-2} k(k-1)t^{k-2} e^{\lambda t} \\ &\vdots \\ &= (D - \lambda)^{m-k+1} k(k-1) \cdots 2\, te^{\lambda t} \\ &= (D - \lambda)^{m-k} k! e^{\lambda t} \ = \ 0 \end{aligned}$$

Aplicando a proposição anterior, obtemos soluções da forma $t^l e^{\lambda t}$ para $l < m_j$; ou seja:

- **Caso 1:** $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Então

$$e^{\lambda_j t}\ , \quad te^{\lambda_j t}\ , \quad t^2 e^{\lambda_j t} \quad \ldots\ , \quad t^{m_j-1}e^{\lambda_j t}$$

  são m_j soluções (reais) linearmente independentes.

- **Caso 2:** $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C}$. Isto implica que $\bar{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j$ também é raiz de $P(R)$. Neste caso, obtêm-se $2m_j$ soluções linearmente independentes,

$$\begin{array}{l} e^{\lambda_j t}\ , \quad te^{\lambda_j t}\ , \quad t^2 e^{\lambda_j t} \quad \ldots\ , \quad t^{m_j-1}e^{\lambda_j t} \\ e^{\bar{\lambda}_j t}\ , \quad te^{\bar{\lambda}_j t}\ , \quad t^2 e^{\bar{\lambda}_j t} \quad \ldots\ , \quad t^{m_j-1}e^{\bar{\lambda}_j t}. \end{array}$$

  Porém, estas soluções são complexas.

  No entanto, tendo em conta que:

$$e^{\lambda_j t} = e^{\alpha_j t}e^{i\beta_j t} = e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) + ie^{\alpha_j t}\operatorname{sen}(\beta_j t)$$
$$e^{\bar{\lambda}_j t} = e^{\alpha_j t}e^{-i\beta_j t} = e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) - ie^{\alpha_j t}\operatorname{sen}(\beta_j t)$$

  então pelo princípio da sobreposição,

$$\frac{1}{2}\left(t^m e^{\lambda_j t} + t^m e^{\bar{\lambda}_j t}\right) = t^m e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t)$$
$$\frac{1}{2i}\left(t^m e^{\lambda_j t} - t^m e^{\bar{\lambda}_j t}\right) = t^m e^{\alpha_j t}\operatorname{sen}(\beta_j t)$$

  são também soluções (e são funções reais). Assim, a partir do par de raízes $\alpha \pm i\beta$ de multiplicidades m_j obtêm-se $2m_j$ soluções linearmente independentes (reais):

$$\begin{array}{ccccccc} e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) & , & te^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) & , & \ldots & , & t^{m_j-1}e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) \\ e^{\alpha_j t}\operatorname{sen}(\beta_j t) & , & te^{\alpha_j t}\operatorname{sen}(\beta_j t) & , & \ldots & , & t^{m_j-1}e^{\alpha_j t}\operatorname{sen}(\beta_j t) \end{array}$$

O número total de soluções reais linearmente independentes obtidas pelo procedimento anterior é igual ao número de raízes, contando as multiplicidades, do polinómio característico; ou seja, igual a:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$$

Este procedimento permite assim obter uma base para o espaço de soluções da equação homogénea (1.59) constituida apenas por funções reais.

Exemplo 1:
Consideremos a equação

$$y^{(6)} + y^{(5)} + y^{(4)} + y^{(3)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (D^6 + D^5 + D^4 + D^3)y = 0$$

O seu polinómio característico (e factorização) é:

$$\begin{aligned} P(R) &= R^6 + R^5 + R^4 + R^3 = R^3(R^3 + R^2 + R + 1) \\ &= R^3(R+1)(R^2+1) = R^3(R+1)(R-i)(R+i) \end{aligned}$$

As raízes do polinómio característico (e correspondentes soluções da equação diferencial) são :

- $\lambda = 0$, com multiplicidade 3:

$$\underbrace{e^{0t}}_{1} \quad , \quad \underbrace{te^{0t}}_{t} \quad , \quad \underbrace{t^2 e^{0t}}_{t^2}$$

- $\lambda = -1$, com multiplicidade 1

$$e^{-t}$$

- $\lambda = \pm i$, com multiplicidade 1

$$\underbrace{e^{0t}\cos(1t)}_{\cos t} \quad , \quad \underbrace{e^{0t}\,\mathrm{sen}(1t)}_{\mathrm{sen}\, t}$$

A solução geral da equação é:

$$y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 e^{-t} + c_5 \cos t + c_6\,\mathrm{sen}\, t$$

com $c_1, c_2, \ldots, c_6 \in \mathbb{R}$.

Problema de valor inicial
Na equação vectorial de ordem 1 equivalente, $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, a condição inicial é da forma:

$$\mathbf{y}(t_0) = \big(y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{n-1}(t_0)\big) = \mathbf{y}_0 = (y_0^0, y_1^0, y_{n-1}^0) \in \mathbb{R}^n$$

Para obter um problema bem posto (onde a solução existe e é única), será necessário prescrever o valor da solução e das suas derivadas até à ordem $n-1$, num ponto $t_0 \in \mathbb{R}$:
O problema de valor inicial para uma equação de ordem n tem, então, a forma:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = b(t) \\ y(t_0) = y_{0,0}, \quad y'(t_0) = y_{0,1}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{0,n-1} \end{cases}$$

onde $t_0 \in \mathbb{R}$ e $y_{0,0}\,, y_{0,1}\,, \ldots,\, y_{0,n-1} \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1 (continuação): No exemplo acima discutido, vamos acrescentar as condições iniciais:

$$y(0) = y'(0) = 1 \quad , \quad y''(0) = y^{(3)}(0) = y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = 0$$

Calculando as derivadas (até à ordem 5) da solução geral e substituindo os valores dados pelas condições iniciais, obtém-se:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0 \\ y^{(3)}(0) = 0 \\ y^{(4)}(0) = 0 \\ y^{(5)}(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_4 + c_5 = 1 \\ c_2 - c_4 + c_6 = 1 \\ 2c_3 + c_4 - c_5 = 0 \\ -c_4 - c_6 = 0 \\ c_4 + c_5 = 0 \\ -c_4 + c_6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \\ c_5 = 0 \\ c_4 = c_6 = 0 \end{cases}$$

Desta forma, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = 1 + t.$$

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 2:
Determinar a solução geral da equação

$$y''' + 4y'' + 4y' = 0 \tag{1.60}$$

Fazendo $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma

$$(D^3 + 4D^2 + 4D)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D(D+2)^2 y = 0 \quad \Leftarrow \quad Dy = 0 \text{ ou } (D+2)^2 y = 0$$

Podemos então obter soluções linearmente independentes da equação (1.60) resolvendo $Dy = 0$ e $(D+2)^2 y = 0$. Uma solução da equação $Dy = 0$ é e^{0t}. Por outro lado a equação $(D+2)^2 y = 0$ tem como soluções, por exemplo, e^{-2t} e te^{-2t}. Como tal a solução geral de (1.60) é

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-2t} + c_3 t e^{-2t} \quad , \quad c_1,\ c_2\ c_3 \in \mathbb{R}$$

Exemplo 3:
Determinar a solução do PVI

$$y'' + 8y' + 12y = 0 \quad , \quad y(0) = 3 \ , \ y'(0) = -14 \tag{1.61}$$

Comecemos por determinar a solução geral da equação. Fazendo $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma

$$(D^2 + 8D + 12)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D+2)(D+6)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D+6)y = 0 \text{ ou } (D+2)y = 0$$

Uma solução da equação $(D+6)y = 0$ é e^{-6t}. Por outro lado a equação $(D+2)y = 0$ tem como solução e^{-2t}. Como tal a solução geral da equação é dada por

$$y(t) = c_1 e^{-6t} + c_2 e^{-2t} \quad , \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Para que as condições iniciais se verifiquem

$$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = -14 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -6c_1 - 2c_2 = -14 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Finalmente a solução de (1.61) é

$$y(t) = 2e^{-6t} + e^{-2t}$$

1.5.6 Soluções Particulares Através da Fórmula de Variação das Constantes

Para calcular uma solução particular, $y_P(t)$, da equação

$$P(D)y = h(t) \tag{1.62}$$

começamos por discutir o método mais geral, e que consiste na aplicação da fórmula da variação das constantes (1.39). Em teoria, este método é aplicável a todos os problemas em que $h(t)$ é somente uma função contínua. Na prática, contudo, pode não ser fácil obter uma fórmula explícita por primitivação (e invocando apenas funções elementares).

Como vimos, a equação não homogénea de ordem n pode ser escrita como a equação vectorial de ordem 1:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ . \\ . \\ . \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ . \\ . \\ . \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ h(t) \end{bmatrix} \tag{1.63}$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .... & 0 \\ & & & ... & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

é a já referida *matriz companheira* da equação (1.62). Sendo y_1,...,y_n soluções linearmente independentes da equação homogénea associada (conforme foram determinadas na subsecção anterior), a sua matriz *Wronskiana* é

$$W(t) = \begin{bmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1' & ... & y_n' \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ y_1^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Como as colunas da matriz $W(t)$ são soluções linearmente independentes da equação homogénea associada a (1.63), a matriz $W(t)$ é uma matriz solução fundamental da equação vectorial (1.63) pelo que, por aplicação da fórmula da variação das constantes para equações vectoriais, tem-se que uma solução particular de (1.63) será dada por

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ . \\ . \\ . \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = W(t) \int^t W^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ h(s) \end{bmatrix} ds \, ,$$

tendo-se então que:

$$y_P(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \end{bmatrix} \int^t W^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ h(s) \end{bmatrix} ds$$

Exemplo:
Determinar a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t} \tag{1.64}$$

A solução geral da equação é da forma

$$y(t) = y_G(t) + y_P(t)$$

em que y_G é a solução geral da equação homogénea associada, e y_P é uma solução particular de (1.64).

- *Cálculo de* y_G

  Como foi referido, y_G é a solução de

  $$y'' + 2y' + 2y = 0$$

  e como tal a sua solução geral é (determinada no exemplo 3 da subsecção 2.5.2)

  $$y_G(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t \quad , \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

- *Cálculo de* y_P

  Para determinar y_P vamos utilizar a fórmula da variação das constantes. Começamos por observar que $e^{-t}\cos t$ e $e^{-t}\operatorname{sen} t$ são soluções da equação homogénea, e como tal uma matriz Wronskiana é dada por:

  $$W(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\operatorname{sen} t \\ (e^{-t}\cos t)' & (e^{-t}\operatorname{sen} t)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\operatorname{sen} t \\ -e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t) & e^{-t}(-\operatorname{sen} t + \cos t) \end{bmatrix}$$

  Assim

  $$y_P(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\operatorname{sen} t \end{bmatrix} \int W^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^{-t} \end{bmatrix} dt = 2e^{-t}$$

Finalmente a solução geral de (1.64) é

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t + 2e^{-t} \quad , \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

1.5.7 Método dos Coeficientes Indeterminados

Descrevemos agora um outro método para o cálculo de uma solução particular da equação

$$P(D)y = b(t) \tag{1.65}$$

que é bastante mais eficiente que o anterior. Contudo, este método é **apenas** aplicável nos casos em que o termo não homogéneo, $b(t)$, é uma função da forma

$$t^p e^{\lambda t} \quad \text{ou} \quad t^p e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad \text{ou} \quad t^p e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t) \quad , \quad p \geq 0 \tag{1.66}$$

ou suas combinações lineares.

Dada uma função $b(t)$, define-se *polinómio aniquilador* de $b(t)$ como sendo o polinómio diferencial $P_A(D)$ que verifica

$$P_A(D)b(t) = 0$$

Se $b(t)$ for uma combinação linear de funções do tipo (1.66), então existe um polinómio aniquilador, e, pela subsecção 2.5.5, concluímos que

se $b(t) = t^p e^{\lambda t}$, então o seu polinómio aniquilador é

$$P_A(D) = (D - \lambda)^{p+1}$$

se $b(t) = t^p e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ ou $b(t) = t^p e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$, então o seu polinómio aniquilador é da forma

$$P_A(D) = \Big(D - (\alpha + i\beta)\Big)^{p+1}\Big(D - (\alpha - i\beta)\Big)^{p+1} = \Big((D-\alpha)^2 + \beta^2\Big)^{p+1}$$

O método dos coeficientes indeterminados para resolver a equação $P(D)y = b(t)$ consiste em:

1. Determinar o polinómio aniquilador, $P_A(D)$, de $b(t)$. Seja k o seu grau.

2. Aplicar $P_A(D)$ a ambos os membros da equação inicial, donde resulta:

$$P(D)y = b(t) \quad \Rightarrow \quad P_A(D)P(D)y = P_A(D)b(t) \quad \Leftrightarrow \quad P_A(D)P(D)y = 0$$

Note que a aplicação de $P_A(D)$ **não** produz uma equação equivalente à inicial. Embora qualquer solução de $P(D)y = b(t)$ seja solução de $P_A(D)P(D)y = 0$, nem todas as soluções da segunda equação resolvem a primeira.

Assim obtivemos uma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes de ordem $n + k$.

3. A solução geral da equação $P_A(D)P(D)y = 0$ é dada por

$$y(t) = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n \; + \; \beta_1 w_1 + \dots + \beta_p w_p$$

em que y_1, ..., y_n são as soluções linearmente independentes da equação $P(D)y = 0$ determinadas previamente, ou seja:

$$y_G(t) = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$$

Tem-se então que existem β_1, ..., $\beta_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$y_P = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_p w_p$$

é uma solução particular de $P(D)y = b(t)$.

4. Determinam-se os coeficientes β_1, ..., β_p de modo a que $w = \beta_1 w_1 + ... + \beta_p w_p$ verifique $P(D)w = b(t)$.

Exemplo:
Determinar a solução do PVI

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \quad , \quad y(0) = 0 \ \ , y'(0) = 1 \tag{1.67}$$

A solução da equação diferencial é da forma

$$y(x) = y_G(x) + y_P(x)$$

em que y_G é a solução geral da equação homogénea associada, e y_P é uma solução particular da equação completa.

- *Cálculo de y_g*

  A equação homogénea associada é

  $$y'' + 3y' + 2y = 0$$

  Fazendo $y' = Dy$, obtém-se

  $$(D^2 + 3D + 2)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D+1)(D+2)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D+1)y = 0 \ \text{ ou } \ (D+2)y = 0$$

  Uma solução da equação $(D+1)y = 0$ é e^{-x}. Por outro lado a equação $(D+2)y = 0$ tem como solução e^{-2x}. Como tal

  $$y_G(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} \quad , \quad c_1, \ c_2 \in \mathbb{R}$$

- *Cálculo de y_P*

  Dado que $b(x) = e^{-x}$, podemos utilizar o método dos coeficientes indeterminados para determinar a solução particular y_P. O polinómio aniquilador de $b(x)$ é

  $$P_A(D) = D + 1$$

  Assim, e utilizando a factorização do polinómio característico feito anteriormente

  $$(D+1)(D+2)y = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad (D+1)(D+1)(D+2)y = (D+1)e^{-x},$$

  ou seja,

  $$(D+1)^2(D+2)y = 0$$

  A solução geral desta última equação (que é homogénea) é:

  $$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{-2x}$$

  Dado que $c_1 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$ representa a solução geral da equação homogénea associada a (1.67), conclui-se que a forma da solução particular é $y_P(x) = \alpha x e^{-x}$. Seguidamente teremos que determinar o valor da constante α de modo a que y_P seja de facto solução da equação $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$. Substituindo $y_P(x)$ na equação não homogénea (1.67), obtém-se:

  $$(\alpha x e^{-x})'' + 3(\alpha x e^{-x})' + 2(\alpha x e^{-x}) = e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 1$$

  Conclui-se que

  $$y_P(x) = x e^{-x}$$

- *Cálculo da solução geral de (1.67)*

  Como já foi referido

$$y(x) = y_G(x) + y_P(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + xe^{-x} \quad , \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

- *Cálculo da solução de (1.67)*

  Para que as condições iniciais se verifiquem

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

  Finalmente a solução de (1.61) é

$$y(x) = xe^{-x}$$

1.5.8 Aplicações à resolução de equações vectoriais de 1ª ordem

Como exemplo de aplicação do métodos desta secção às equações vectoriais lineares — que estudámos na secção 1.4 — vamos agora resolver a equação vectorial linear de primeira ordem, de coeficientes constantes, no caso linear. O método consiste em resolver a equação

$$\mathbf{Y}'(t) = A\mathbf{Y}(t), \tag{1.68}$$

com $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$, $A = \Big[a_{ij}(t)\Big]_{i,j=1}^{n}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, procurando reduzi-la a uma equação linear homogénea de ordem n equivalente.

A equação vectorial linear de coeficientes constantes, homogénea, pode ser escrita na forma

$$\begin{cases} y_1'(t) & = & a_{11}\, y_1(t) + \ldots + a_{1n}\, y_n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n'(t) & = & a_{n1}\, y_1(t) + \ldots + a_{nn}\, y_n(t) \end{cases}$$

Usando o método de substituição, esta equação pode ser reduzida a uma equação de ordem n, linear, de coeficientes constantes, homogénea, onde a sua variável dependente é precisamente uma das componentes y_i de Y (para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$).

Exemplo 1:
Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

vamos — através da resolução de equações homogéneas escalares de ordem n de coeficientes constantes — determinar a matriz e^{At} e a solução do (PVI):

$$\begin{cases} x' = 2x + 4y \\ y' = -x - 2y \\ z' = x + 2y \end{cases} \quad , \quad \Big(x(0), y(0), z(0)\Big) = (1, 1, 1)$$

Comecemos por determinar uma matriz solução fundamental associada ao sistema (que é homogéneo). A partir da 1ª equação,

$$x' = 2x + 4y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x' - 2x}{4}.$$

Substituindo y por $\frac{x'-2x}{4}$ na segunda equação, obtemos:

$$y' = -x - 2y \quad \Rightarrow \quad \Big(\frac{x'-2x}{4}\Big)' = -x - 2\Big(\frac{x'-2x}{4}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad x'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = c_1 + c_2 t$$

Assim

$$y(t) = \frac{x'-2x}{4} = \frac{c_2 - 2c_1 - 2c_1 t}{4} \quad \text{e} \quad z = \int (x+2y)dt = \frac{c_2 t}{2} + c_3$$

Então

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t \\ \frac{c_2 - 2c_1 - 2c_1 t}{4} \\ \frac{c_2 t}{2} + c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} - \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

A matriz

$$S(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} - \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz solução fundamental associada ao sistema mas não é e^{At} (dado que para $t = 0$ não iguala a matriz identidade. Tem-se que

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} - \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1+2t & 4t & 0 \\ -t & 1-2t & 0 \\ t & 2t & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, a solução do (PVI) é dada por

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2t & 4t & 0 \\ -t & 1-2t & 0 \\ t & 2t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6t \\ 1-3t \\ 1+3t \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2:
Determinar a solução geral da equação

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} Y$$

Fazendo $Y = (x, y)$, a equação pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$$

Resolvendo (por exemplo) a primeira equação em ordem a y, obtém-se

$$y = -\frac{1}{3}(x' - x)$$

pele que, substituindo na segunda equação

$$\Big(-\frac{1}{3}(x'-x)\Big)' = 3x + \Big(-\frac{1}{3}(x'-x)\Big)$$

que é uma equação de segunda ordem (linear, de coeficientes constantes, homogénea) em x. Simplificando e resolvendo

$$x'' - 2x' + 10x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - 2D + 10)x = 0$$

O polinómio característico associado, $P(R) = R^2 - 2R + 10$, tem raízes complexas conjugadas $1 \pm 3i$ pelo que uma base do espaço de soluções será (por exemplo) $\operatorname{Re} e^{(1+3i)t}$ e $\operatorname{Im} e^{(1+3i)t}$. Tem-se então que

$$x(t) = ae^t \cos(3t) + be^t \operatorname{sen}(3t)$$

e tornando a substituir

$$y = -\frac{1}{3}\big(x' - x\big) = -be^t \cos(3t) + ae^t \operatorname{sen}(3t)$$

Finalmente, a solução da equação vectorial é dada por

$$Y(t) = e^t \begin{bmatrix} a\cos(3t) + b\operatorname{sen}(3t) \\ -b\cos(3t) + a\operatorname{sen}(3t) \end{bmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3:
Vamos agora determinar a solução geral da equação

$$Y' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} Y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y + z \\ z' = 2z \end{cases}$$

Neste caso não vamos conseguir reduzir o sistema a uma equação de ordem 3 em qualquer uma das variáveis, consequência de nas duas últimas equações não há dependência em x e na primeira não haver dependência nas variáveis y e z. No entanto conseguiremos aplicar o método aos "sub-sistemas"

$$x' = 2x \quad \text{e} \quad \begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = 2z \end{cases}$$

Para o primeiro

$$x' = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = c_1 e^{2t}$$

Para o outro sistema, podemos utilizar dois métodos: ou reduzir a uma equação de ordem 2 (forçosamente em y) e resolvê-lo como no exemplo anterior, ou como método alternativo que resulta sempre que a matriz associada ao sistema é triangular, e que consiste em resolver a equação em z' (dado que só depende de z) substituir na equação em y' (dado que, conhecida z só depende de y). Assim

$$z' = 2z \quad \Leftrightarrow \quad z(t) = c_2 e^{2t}$$

Substituindo na equação em y'

$$y' = 2y + c_2 e^{2t} \quad \Leftrightarrow \quad y' - 2y = c_2 e^{2t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(e^{-2t} y\Big) = c_2 \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = e^{2t}(c_2 t + c_3)$$

e substituindo na equação em x' Finalmente, a solução da equação vectorial é dada por

$$Y(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 t + c_3 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

1.6 Transformada de Laplace

1.6.1 Definição e Propriedades

Definição da Transformada de Laplace

Seja $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$. Define-se a *Transformada de Laplace* de f como sendo a função

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{1.69}$$

Por vezes usa-se a notação $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ para representar $\mathcal{L}\{f\}(s)$, em situações em que se designa a função f pela fórmula que a define.

Domínio da Transformada de Laplace

Se a função f for seccionalmente contínua em qualquer $[0, T]$, com $T \in \mathbb{R}^+$ e verificar

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t} \qquad , \qquad \forall t \geq 0 \tag{1.70}$$

para certas constantes $M > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então a transformada de Laplace de f está bem definida para $s > \alpha$.

Demonstração: Para qualquer $t > 0$ e $s > \alpha \Leftrightarrow \alpha - s < 0$:

$$\left|e^{-st} f(t)\right| = e^{-st} |f(t)| \leq e^{-st} M e^{\alpha t} = M e^{(\alpha - s)t}$$

Então, para $s > \alpha$:

$$\left| \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \right| \leq \int_0^\infty M e^{(\alpha - s)t}\, dt = M \lim_{R\to\infty} \left. \frac{e^{(\alpha - s)t}}{\alpha - s} \right|_0^R = \frac{M}{s - \alpha}$$

□

Nota: A definição anterior pode-se generalizar a qualquer $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$. Prova-se, de forma idêntica, que a transformada de Laplace de f é uma função de variável complexa, $s \in \mathbb{C}$, definida pela equação (1.69). Desta forma, $\mathcal{L}\{f\}(s)$ fica bem definida no subconjunto dos números complexos s tais que $\operatorname{Re} s > \alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{R}^+$ é a constante obtida da condição de convergência (1.70). O que nos interessará em particular é que $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe sempre para $s \in \mathbb{R}$ maior ou igual que α.

Exemplo:

Sendo $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$, (e também para $a \in \mathbb{C}$) tem-se que

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \lim_{R\to\infty} \left. \frac{e^{(a-s)t}}{a - s} \right|_{t=0}^R = \frac{1}{s - a}\,, \qquad s > a$$

Para $a = \operatorname{Re} a + i \operatorname{Im} a \in \mathbb{C}$, como se tem $\left|e^{at}\right| = \left|e^{(\operatorname{Re} a)t + i(\operatorname{Im} t)t}\right| = \left|e^{(\operatorname{Re} a)t}\right| \underbrace{\left|e^{i(\operatorname{Im} a)t}\right|}_{=1} = e^{(\operatorname{Re} a)t}$,

então

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s - a}\,, \qquad s > \operatorname{Re} a.$$

Como caso particular das fórmulas acima, podemos obter

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \mathcal{L}\{e^{0t}\}(s) = \frac{1}{s}, \qquad s > 0$$

Função de Heaviside

Sendo $c \in \mathbb{R}$, define-se a *função de Heaviside* (centrada em c) por

$$H_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < c \\ 1 & \text{se} \quad t \geq c \end{cases}$$

Se $c = 0$, escreve-se simplesmente $H(t) \overset{\text{def}}{=} H_0(t)$. Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, $H_c(t) = H(t-c)$.

Exemplo: (Transformada de Laplace da função de Heaviside)

Se $c \geq 0$

$$\mathcal{L}\{H_c(t)\}(s) = \int_0^\infty H(t-c)e^{-ts}dt = \int_c^\infty e^{-ts}dt = \lim_{N\to\infty} -\frac{e^{-ts}}{s}\bigg|_c^N = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$$

Propriedades Elementares da Transformada de Laplace:

Assumindo que as funções f e g admitem transformadas de Laplace bem definidas numa região $s > \alpha$ (para $\alpha \in \mathbb{R}$ dado por uma condição do tipo (1.70)):

(1) Linearidade

$$\mathcal{L}\{f+g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s)$$

e para $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha\mathcal{L}\{f\}(s)$$

Em consequência, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}\left\{\alpha f + \beta g\right\}(s) = \alpha\mathcal{L}\{f\}(s) + \beta\mathcal{L}\{g\}(s)$$

(2) Translação da Transformada de Laplace Para $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s+a) \qquad (s > -a + \alpha)$$

(3) Derivada da Transformada de Laplace Para $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^n}{ds^n}\Big(\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\Big) = (-1)^n\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)$$

(4) Transformada de Laplace da Translação Para $c \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{L}\{H(t-c)f(t-c)\}(s) = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

(5) Transformada de Laplace da Derivada

Se f admite derivada seccionalmente contínua em $[0,\infty[$ e $s > \alpha$ (da condição (1.70)) então:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

Então, aplicando $n \in \mathbb{N}$ vezes a propriedade anterior, se f admite derivadas seccionalmente contínuas até à ordem n em $[0,\infty[$:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = -f^{(n-1)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - \cdots - s^{n-2}f'(0) - s^{n-1}f(0) + s^n\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

(6) Transformada de Laplace da Convolução

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

onde $f*g$ designa a convolução de f com g, dada por

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-y)g(y)dy.$$

Demonstração:

(1) A propriedade é verdadeira devido à linearidade dos integrais impróprios.

(2) $\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}e^{-at}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}f(t)\,dt = \mathcal{L}\{f(t)\}(s+a)$

(3) Vamos provar o resultado por indução. No caso $n=1$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-st}f(t)\right)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)\,dt \\ &= -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) \end{aligned}$$

Admitindo que a propriedade é válida para $n-1$, então (e usando o caso $n=1$):

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{d}{ds}\left(\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\right) = \frac{d}{ds}\Big((-1)^{n-1}\mathcal{L}\{t^{n-1}f(t)\}(s)\Big) \\ &= (-1)^{n-1}\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{t^{n-1}f(t)\}(s) = (-1)^{n-1}(-1)\mathcal{L}\Big\{t(t^{n-1}f(t))\Big\}(s) \\ &= (-1)^n\mathcal{L}\{t^nf(t)\}(s) \end{aligned}$$

(4) Como $H(t-c)=0$ para $t\in[0,c]$:

$$\mathcal{L}\{H(t-c)f(t-c)\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}H(t-c)f(t-c)\,dt=\int_c^\infty e^{-st}f(t-c)\,dt$$

Fazendo $\theta=t-c$ no último integral, obtém-se:

$$\mathcal{L}\{H(t-c)f(t-c)\}(s)=\int_0^\infty e^{-s(\theta+c)}f(\theta)\,d\theta=e^{-cs}\int_0^\infty e^{-s\theta}f(\theta)\,d\theta=e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

(5) Integrando por partes (e atendendo a que, por hipótese, $s>\alpha$):

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt=e^{-st}f(t)\big|_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=-f(0)+s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

(6) Para simplificar a notação, sejam

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\qquad\text{e}\qquad G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}(s).$$

O produto das transformadas de Laplace, $F(s)G(s)$, pode ser escrito como o integral duplo:

$$\begin{aligned}F(s)G(s)&=\left(\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-sy}g(y)\,dy\right)\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(x+y)}f(x)g(y)\,dxdy\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $t=x+y \;\Leftrightarrow\; x=t-y$, e notando que o intervalo de integração $x\geq 0$, após a mudança de variável, fica $t=x+y\geq y$, obtém-se:

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty\int_y^\infty e^{-st}f(t-y)g(y)\,dtdy.$$

Usando o teorema de Fubini para trocar a ordem de integração, e tendo em conta que o domínio de integração, nas duas ordens de integração, é dado por

$$T=\Big\{(t,y)\,:\,0\leq y<\infty,\,y\leq t<\infty\Big\}=\Big\{(t,y)\,:\,0\leq t<\infty,\,0\leq y<t\Big\},$$

obtém-se finalmente:

$$\begin{aligned}F(s)G(s)&=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(t-y)g(y)\,dy\right)dt\\&=\int_0^\infty e^{-st}(f*g)(t)dt\\&=\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s).\end{aligned}$$

Exemplos

a) Para $b \in \mathbb{R}$, e usando a linearidade da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{\cos(bt)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2}\right\}(s) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-ib} + \frac{1}{s+ib}\Big) = \frac{s}{s^2+b^2} \ , \ s > 0.$$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(bt)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i}\right\}(s) = \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{s-ib} - \frac{1}{s+ib}\Big) = \frac{b}{s^2+b^2} \ , \ s > 0$$

Note que os domínios das transformadas de Laplace das funções complexas e^{ibt} e $e^{\cdot ibt}$ são dados pelas condições $s > \operatorname{Re}(ib)$ e $s > \operatorname{Re}(-ib)$, o que é equivalente a dizer que $s > 0$.

b) Para a e $b \in \mathbb{R}$, e usando a propriedade da translação da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\cos(bt)\}(s) = \mathcal{L}\{\cos(bt)\}(s+a) = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} \ , \quad s > -a$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\operatorname{sen}(bt)\}(s) = \mathcal{L}\{\operatorname{sen}(bt)\}(s+a) = \frac{b}{(s+a)^2+b^2} \ , \quad s > -a$$

c) Se $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, e usando a propriedade da derivada da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\Big(\mathcal{L}\{e^{at}\}(s)\Big) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \ , \quad s > a$$

Particularizando o resultado anterior para $a = 0$, obtém-se:

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \ , \quad s > 0$$

d) Por aplicação da propriedade da transformada de Laplace da translação, determinar $f(t)$ tal que $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2}$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = e^{-2s}\frac{1}{s^2} = e^{-2s}\mathcal{L}\{t\}(s) = \mathcal{L}\big\{H(t-2)(t-2)\big\}(s)$$

e) Por aplicação da propriedade da transformada de Laplace da convolução, determinar $h(t)$ tal que $\mathcal{L}\{h(t)\}(s) = \frac{s}{(s+2)(s^2+4)}$.

Seja $F(s) = \frac{1}{s+2}$ e $G(s) = \frac{s}{s^2+4}$. Então:

$$\frac{s}{(s+2)(s^2+4)} \ = \ F(s)G(s) \ = \ \mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s),$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= F(s) = \frac{1}{s+2} = \mathcal{L}\{e^{-2t}\}(s) \quad \Rightarrow \quad f(t) = e^{-2t} \\
\mathcal{L}\{g(t)\}(s) &= G(s) = \frac{s}{s^2+4} = \mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) \quad \Rightarrow \quad g(t) = \cos 2t
\end{aligned}$$

Resulta então que:

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) \;=\; (f*g)(t) \\ &= \int_0^t e^{-2(t-y)}\cos 2y\,dy \;=\; e^{-2t}\int_0^t e^{2y}\cos 2y\,dy \\ &= \frac{e^{-2t}}{4}\Big(e^{2t}(\operatorname{sen} 2t+\cos 2t)-1\Big) \\ &= \frac{1}{4}\big(\operatorname{sen} 2t+\cos 2t-e^{-2t}\big). \end{aligned}$$

1.6.2 Aplicações da Transformada de Laplace às equações diferenciais

Vamos introduzir um método que permite resolver um problema de valor inicial para uma equação linear de ordem n, de coeficientes constantes. Para tal, vamos usar a Transformada de Laplace para obter a solução de problemas de valor inicial do tipo:

$$\begin{cases} y^n + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = b(t) \\ y(0) = b_0\ ,\ y'(0) = b_1\ , \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = b_{n-1} \end{cases} \tag{1.71}$$

1. Aplicar a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial do problema (1.71):
$$\mathcal{L}\{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y\}(s) = \mathcal{L}\{b(t)\}(s)$$

2. Aplicando as propriedades da transformada de Laplace, e com
$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$$
obtém-se
$$Y(s) = \frac{1}{P(s)}\big(B(s) + Q(s)\big)$$
onde $P(s)$ é o polinómio característico associado a (1.71), $B(s)$ a transformada de Laplace de $b(t)$ e $Q(s)$ um polinómio de grau menor ou igual que $n-1$. Quando as condições iniciais são nulas, $Q(s) = 0$.

3. Finalmente, determinar a função $y(t)$ tal que
$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s).$$
Em consequência:
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)$$
Diz-se que $y(t)$ é a transformada de Laplace inversa de $Y(s)$. Utilizando este método, obtém-se a solução, $y(t)$, do PVI (1.71).

Exemplo:

Determinar a solução (para $t \geq 0$) do problema de valor inicial:

$$\ddot{y} + y = b(t) \qquad , \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

onde $b(t)$ é definida pela expressão

$$b(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se} \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{se} \quad t \geq 1 \end{cases} = \big(1 - H(t-1)\big)\, t^2 = t^2 - H(t-1)\, t^2$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial, obtém-se

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{y} + y\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{b(t)\right\}(s).$$

Pela propriedade da transformada de Laplace da translação:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{b(t)\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{t^2\right\}(s) - \mathcal{L}\left\{H(t-1)t^2\right\}(s) = \frac{2}{s^3} - \mathcal{L}\left\{H(t-1)\big((t-1)+1\big)^2\right\}(s) \\ &= \frac{2}{s^3} - e^{-s}\mathcal{L}\left\{(t+1)^2\right\}(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s}\mathcal{L}\left\{t^2 + 2t + 1\right\}(s) \\ &= \frac{2}{s^3} - e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right) \end{aligned}$$

Por outro, usando a linearidade:

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{y} + y\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\ddot{y}\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{y\right\}(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s}\Big(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\Big)$$

Pela propriedade da transformada de Laplace da derivada,

$$-\dot{y}(0) - sy(0) + s^2\mathcal{L}\left\{y\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{y\right\}(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s}\Big(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\Big)$$

Usando a notação $Y(s) = \mathcal{L}\left\{y(t)\right\}(s)$, e atendendo a que $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, tem-se então

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s}\Big(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\Big),$$

ou seja,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1}\left(\frac{2}{s^3} - e^{-s}\Big(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\Big)\right).$$

Sejam $F_1(s)$ e $F_2(s)$ tais que:

$$Y(s) \;=\; \underbrace{\frac{2}{s^3(s^2+1)}}_{F_1(s)} \;-\; \underbrace{e^{-s}\left(\frac{1}{s^2+1}\Big(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\Big)\right)}_{F_2(s)}$$

Em $F_1(s)$, fazendo separação em fracções simples e aplicando as propriedades da Transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \frac{-2}{s} + \frac{0}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{2s+0}{s^2+1} \\ &= \frac{-2}{s} + \frac{d^2}{ds^2}\,\frac{1}{s} + 2\,\frac{s}{s^2+1} \\ &= -2\mathcal{L}\{1\}(s) + \mathcal{L}\{t^2\}(s) + 2\mathcal{L}\{\cos t\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{-2 + t^2 + 2\cos t\}(s) \end{aligned}$$

Tratando $F_2(s)$ de forma similar:

$$\begin{aligned}
F_2(s) &= e^{-s}\Big(\frac{-1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s^3}+\frac{s-2}{s^2+1}\Big)\\
&= e^{-s}\Big(\frac{-1}{s}-2\frac{d}{ds}\frac{1}{s}+\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}-2\frac{1}{s^2+1}\Big)\\
&= e^{-s}\Big(-\mathcal{L}\{1\}(s)+2\mathcal{L}\{t\}(s)+\mathcal{L}\left\{t^2\right\}(s)+\mathcal{L}\{\cos t\}(s)-2\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s)\Big)\\
&= e^{-s}\mathcal{L}\left\{-1+2t+t^2+\cos t-2\operatorname{sen} t\right\}(s)\\
&= \mathcal{L}\Big\{H(t-1)\Big(-1+2(t-1)+(t-1)^2+\cos(t-1)-2\operatorname{sen}(t-1)\Big)\Big\}(s)
\end{aligned}$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \mathcal{L}\Big\{-2+t^2+2\cos t\\
&\qquad -H(t-1)\Big(-1+2(t-1)+(t-1)^2+\cos(t-1)-2\operatorname{sen}(t-1)\Big)\Big\}(s)
\end{aligned}$$

e assim a solução do PVI é

$$\begin{aligned}
y(t) &= -2+t^2+2\cos t-H(t-1)\Big(-1+2(t-1)+(t-1)^2+\cos(t-1)-2\operatorname{sen}(t-1)\Big)\\
&= \begin{cases} -2+t^2+2\cos t & \text{se} \quad 0\le t<1\\ -3+t^2+2\cos t-2(t-1)-(t-1)^2-\cos(t-1)+2\operatorname{sen}(t-1) & \text{se} \quad t\ge 1\end{cases}
\end{aligned}$$

1.6.3 Distribuição Delta de Dirac

A delta de Dirac é a distribuição que verifica

$$\delta(t)=0 \qquad \forall t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1$$

Se f é contínua em $t=0$ então:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\,dt=f(0) \tag{1.72}$$

Admitindo que os integrais do tipo (1.72) estão bem definidos e têm as propriedades típicas de um integral (note que a propriedade da aditividade,

$$\int_a^b\delta(t)f(t)dt=\int_a^c\delta(t)f(t)dt+\int_c^b\delta(t)f(t)dt \qquad \text{para} \qquad -\infty\le a<c<b\le\infty,$$

requer $c\neq 0$) então podemos justificar a validade de (1.72) como se segue.

Dado um $\epsilon > 0$ arbitrário, pela continuidade de f em 0 existe $\eta > 0$ tal que

$$|t| < \eta \qquad \Rightarrow \qquad \big|f(t) - f(0)\big| < \epsilon.$$

Assim sendo, e tendo em conta que $|t| > \eta \ \Rightarrow \ t \neq 0 \ \Rightarrow \ \delta(t) = 0$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\big(f(t) - f(0)\big)\,dt\right| &= \left|\int_{-\eta}^{\eta} \delta(t)\big(f(t) - f(0)\big)\,dt\right| \\
&\leq \int_{-\eta}^{\eta} \delta(t)\,\underbrace{\big|f(t) - f(0)\big|}_{\leq \epsilon}\,dt \\
&\leq \epsilon \int_{-\eta}^{\eta} \delta(t)\,dt \ = \ \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = \epsilon
\end{aligned}$$

Sendo a desigualdade anterior válida para qualquer $\epsilon > 0$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\big(f(t) - f(0)\big)\,dt = 0$$

o que implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(0)\,dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = f(0).$$

Mais genericamente, podemos definir a distribuição delta de Dirac centrada em um dado $c \in \mathbb{R}$ por:

$$\delta_c(t) = \delta(t - c)$$

A distribuição $\delta_c(t)$ verifica, então:

a) $\delta_c(t) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$.

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta_c(t)\,dt = 1$

c) Se f é contínua em c então $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta_c(t) f(t)\,dt = f(c)$

Desta forma:

$$\mathcal{L}\left\{\delta_c(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_c(t) e^{-st}\,dt = e^{-cs}.$$

Exemplo 1:

Determinar a solução (para $t \geq 0$) do problema de valor inicial:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2\delta(t - 2) \qquad , \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial, obtém-se

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{y} + 2\dot{y} + y\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{2\delta(t - 2)\right\}(s) = 2e^{-2s}$$

Usando a linearidade, a propriedade da transformada de Laplace da derivada e a notação $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$
$$-\dot{y}(0) - sy(0) + s^2Y(s) + 2\left(-y(0) + sY(s)\right) + Y(s) = 2e^{-2s},$$
o que é equivalente a
$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = 2e^{-2s},$$
ou seja
$$Y(s) = e^{-2s}\frac{2}{(s+1)^2} = e^{-2s}\mathcal{L}\left\{2te^{t}\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{2H(t-2)(t-2)e^{-(t-2)}\right\}(s)$$
Consequentemente, a solução do problema de valor inicial é:
$$y(t) = 2H(t-2)(t-2)e^{-(t-2)}.$$

Exemplo 2:

Determinar a solução (para $t \geq 0$) do problema de valor inicial:
$$y'' + y = -\delta(t-\pi) \qquad , \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$
Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial, obtém-se
$$\mathcal{L}\left\{y'' + y\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{-\delta(t-\pi)\right\}(s) = -e^{-\pi s}$$
Usando a linearidade, a propriedade da transformada de Laplace da derivada (e a notação usual $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$)
$$-y'(0) - sy(0) + s^2Y(s) + Y(s) = -e^{-\pi s},$$
o que é equivalente a
$$(s^2 + 1)Y(s) = -e^{-\pi s},$$
ou seja
$$Y(s) \;=\; -e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1} \;=\; e^{-\pi s}\mathcal{L}\left\{-\operatorname{sen} t\right\}(s) \;=\; \mathcal{L}\left\{-H(t-\pi)\operatorname{sen}(t-\pi)\right\}(s)$$
Assim sendo, a solução do problema de valor inicial é:
$$y(t) \;=\; -H(t-\pi)\operatorname{sen}(t-\pi) \;=\; H(t-\pi)\operatorname{sen} t \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq t < \pi \\ \operatorname{sen} t & \text{se} \quad t \geq \pi \end{cases}.$$