Equações Diferenciais Parciais
Notas Sobre as Aulas Teóricas

João Teixeira, Maria João Borges

1º Semestre de 2021/22

Índice

Capítulo 1

Introdução às Equações Diferenciais Parciais

O objectivo de resolver uma equação diferencial parcial é determinar uma função $u(x_1, ..., x_n)$ que verifica uma relação de igualdade envolvendo as suas derivadas (que serão derivadas parciais).

Centraremos o nosso estudo nas equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem em domínios (espaciais) rectangulares, em que as equações são afins aos três tipos seguintes:

- **Equação do Calor**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\Big)$$

  em que $t > 0$, $x_1 \in [0, L_1]$,..., $x_n \in [0, L_n]$, e $K > 0$ é a condutividade térmica do material. Este tipo de equações está associado a processos envolvendo condução térmica e difusão[1].

- **Equação de Laplace**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

  em que $x_1 \in [0, L_1]$,..., $x_n \in [0, L_n]$. Este tipo de equações está associado a processos estacionários de condução térmica e difusão, à electrostática e ao movimento dos fluídos.

- **Equação das Ondas**

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = c^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\Big)$$

  em que $t > 0$, $x_1 \in [0, L_1]$,..., $x_n \in [0, L_n]$, e c uma constante. Este tipo de equações está associado a processos envolvendo propagação de ondas.

Para resolver estas equações, necessitaremos de estabelecer

- **Condições de Fronteira**

  Que predefinem o comportamento da função u na fronteira de $R = [0, L_1] \times ... \times [0, L_1]$, e que poderão ser de vários tipos:

  - ◇ *Condições de Dirichlet*
    se definem o valor de u na fronteira de R;

[1] No caso de de tratar da equação de difusão, $\frac{\partial u}{\partial t} = D\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\Big)$, $D > 0$ é o coeficiente de difusão da susbtância.

- ◇ *Condições de Neumann*
  se definem o valor de $\frac{\partial u}{\partial x}$ na fronteira de R (ou seja, definem o fluxo de u na fronteira de R);

  Poderão ainda ser *mistas* se existirem condições dos dois tipos.

  As condições de fronteira dizem-se *homogéneas* se forem nulas.

- **Condições Iniciais**
  que definem o estado inicial, isto é, para a equação do calor

$$u(0, x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) \quad , \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in R$$

e para a equação das ondas

$$\begin{cases} u(0, x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, ..., x_n) = g(x_1, ..., x_n) \end{cases} \quad , \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in R$$

1.1 Método de Separação de Variáveis

Para descrever o método de separação de variáveis, vamos aplicá-lo ao problema de Dirichlet homogéneo para a equação do calor.

A equação do calor unidimensional modela a propagação de calor (ou a difusão de uma substância) através de um corpo unidimensional (por exemplo uma barra) de comprimento L. A função $u(t, x)$ mede a temperatura da barra no ponto x no instante t e verifica a equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad \forall t > 0 \, , \ x \in]0, L[$$

sendo $K > 0$ a condutividade térmica (ou o coeficiente de difusão). Assumiremos condições de fronteira de Dirichlet homógeneas, isto é

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad , \quad \forall t > 0$$

e a condição inicial

$$u(0, x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in]0, L[$$

em que f é uma função seccionalmente contínua e com derivada seccionalmente contínua definida no intervalo $[0, L]$.

Resolveremos então o problema de valores na fronteira e inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0 \, , \ x \in]0, L[\\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & x \in]0, L[\end{cases} \tag{1.1}$$

Começamos por notar que se $f(x) \equiv 0$ então a solução de (1.1) é $u(t, x) \equiv 0$. Se f não é identicamente nula então u tambem não o será.

Vamos utilizar o método de separação de variáveis para determinar soluções do problema (1.1) da forma

$$u(t,x) = T(t)X(x)$$

Pela observação acima feita, nem $T(t)$ nem $X(x)$ poderão ser identicamente nulas. Substituindo na equação diferencial obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(T(t)X(x)\Big) = K\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(T(t)X(x)\Big) \;\Leftrightarrow\; T'(t)X(x) = KT(t)X''(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{T'(t)}{KT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Observe-se que, separadas as variáveis, pretende-se que **para todos** $t > 0$ e $x \in]0, L[$ uma função de t ($\frac{T'(t)}{KT(t)}$) iguale uma função de x ($\frac{X''(x)}{X(x)}$). Para que tal se verifique é necessário que ambos igualem uma constante, isto é, para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{T'(t)}{KT(t)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Por outro lado, atendendo às condições de fronteira

- $u(t,0) = 0$ implica $T(t)X(0) = 0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X(0) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer (implicaria $u \equiv 0$) tem-se que $X(0) = 0$.

- $u(t,L) = 0$ implica $T(t)X(L) = 0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X(L) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer, tem-se que $X(L) = 0$.

É conveniente notar que, se não exigíssemos condições de fronteira nulas, o método de separação de variáveis falharia neste ponto. A razão é muito simples — a lei do anulamento do produto não seria aplicável.

Temos então dois problemas para resolver - correspondentes a duas equações diferenciais ordinárias

$$(\mathbf{P1}) \;\; \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \quad , \quad (\mathbf{P2}) \;\; T' = \lambda K T$$

Começamos por resolver o problema **(P1)**. Trata-se duma equação diferencial linear homogénea, cuja solução tem que verificar condições de fronteira nulas. Nesta situação, a função nula é sempre solução de **(P1)**. Existem no entanto alguns valores de λ para os quais essa não é a única solução de **(P1)**.

Definição: λ diz-se um *valor próprio* de **(P1)**, associado à função própria $\varphi(x)$, sse $\varphi(x)$ for uma solução **não nula** de **(P1)**.

Para continuar a nossa resolução, teremos que encontrar os valores própios de **(P1)** a fim de determinar as suas soluções não nulas. Assim

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - \lambda)X = 0$$

Teremos então três casos possíveis:

$\lambda = 0$ — A equação é $D^2X = 0$ o que implica $X(x) = Ax + B$, A, $B \in \mathbb{R}$;

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) — A equação é $(D-\mu)(D+\mu)X = 0$ o que implica $X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$;

$\lambda < 0$ $(\lambda = -\omega^2)$ — A equação é $(D + \mathrm{i}\omega)(D - \mathrm{i}\omega)X = 0$ o que implica $X(x) = A\,\mathrm{sen}(\omega x) + B\cos(\omega x)$;

Os casos $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$, combinados com as condições de fronteira, produzem apenas a solução nula. Conclui-se que qualquer $\lambda \geq 0$ não é valor próprio de **(P1)**. Para o caso $\lambda < 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ X(L) = 0 &\Rightarrow A\,\mathrm{sen}(\omega x) = 0 \end{aligned}$$

pelo que,

$$A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X(x) \equiv 0$$

ou

$$\mathrm{sen}(\omega L) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{n\pi}{L} \qquad \Rightarrow \qquad X(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}, \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}$$

Temos assim que $\lambda = -\omega^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ e $X(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}$, para $n \in \mathbb{Z}$, são os valores próprios e as correspondentes funções próprias associadas. Note que para os índices n inteiros negativos repetem-se os valores próprios e as funções próprias (a menos de combinação linear). Conclui-se que qualquer λ que não seja da forma $-\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ (para algum $n \in \mathbb{N}$) não é valor próprio de **(P1)**, e para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ é valor próprio de **(P1)** associado à função própria $X_n(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}$.

Para resolver o problema **(P2)**, utilizaremos apenas os valores próprios de **(P1)**, dado que para outros valores de λ a única solução de **(P1)** é a nula. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$T' = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}KT \qquad \Rightarrow \qquad T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2K}{L^2}t}$$

Resolvidos **(P1)** e **(P2)**, podemos concluir que as solução da equação do calor unidimensional, da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$, que verificam condições de fronteira de Dirichlet nulas são as funções da forma

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = e^{-\frac{n^2\pi^2K}{L^2}t}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}, \quad , \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

Princípio da Sobreposição

Qualquer combinação linear de soluções de equações diferenciais lineares homogéneas (incluindo de um número infinito, se houver convergência), verificando condições de fronteira homogéneas, é também solução da equação e verifica as mesmas condições de fronteira.

Observa-se que, relativamente a sobreposições com um número infinito de termos, será necessário verificar adicionalmente que a série obtida é uniformemente convergente em subconjuntos compactos do domínio onde a equação diferencial é satisfeita.

Então, atendendo a (1.2)

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2K}{L^2}t}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}, \quad , \quad c_n \in \mathbb{R}$$

é solução da equação do calor unidimensional que verifica condições de fronteira de Dirichlet nulas. Para determinar as constantes c_n teremos que utilizar a condição de fronteira $u(0,x) = f(x)$. Resulta então que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L} = f(x) \tag{1.3}$$

1.2 Séries de Fourier

1.2.1 Definição e convergência pontual

Para qualquer $L \in \mathbb{R}^+$, considere-se uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$. Pode-se associar a f a sua *Série de Fourier*, ou *série trigonométrica*

$$SF_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) \Big)$$

em que

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos(\frac{n\pi x}{L}) dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) dx$$

Teorema: (convergência pontual da série de Fourier)

Se $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente contínua e de derivada seccionalmente contínua em $]-L, L[$, então para cada $x \in [-L, L]$, a série de Fourier associada é uma série convergente, tendo-se que

$$SF_f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{sendo } \; x \text{ um ponto de continuidade de } \; f \\[2ex] \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{sendo } \; x \text{ um ponto de descontinuidade de } \; f \\[2ex] \dfrac{f(L^-) + f(-L^+)}{2} & \text{sendo } \; x = -L \text{ ou } x = L \end{cases} \tag{1.4}$$

Se f é contínua em $x = -L$ e em $x = L$ tem-se, simplesmente [2]:

$$SF_f(\pm L) = \frac{f(L) + f(-L)}{2}$$

Note-se que a série de Fourier SF_f está bem definida em $\mathbb{R}$, é periódica de período $2L$ e está relacionada, no sentido descrito em (1.4)) com a extensão periódica, $\bar{f}$, de f a $\mathbb{R}$, isto é:

$$SF_f(x) = \begin{cases} \bar{f}(x) & \text{sendo } \; x \text{ um ponto de continuidade de } f \\[2ex] \dfrac{\bar{f}(x^+) + \bar{f}(x^-)}{2} & \text{sendo } \; x \text{ um ponto de descontinuidade de } \bar{f} \end{cases}$$

Exemplo:
Determinar a série de Fourier da função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & \text{se} \quad x \in [-1, 0[\\ \pi & \text{se} \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

[2] Na maior parte das aplicações, f é contínua em $x = \pm L$; nos casos em que a continuidade em $x = \pm L$ não se verifica, pode-se de qualquer modo alterar a definição da função f de forma a que $f(L) = f(L^-)$ e $f(-L) = f(-L^+)$.

A série de Fourier associada a f será

$$SF_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\pi x) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x) \Big)$$

Atendendo a que a função f é uma função ímpar, ter-se-á

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0 \qquad \text{e} \qquad a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Por outro lado

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\operatorname{sen}(n\pi x)dx = 2\int_{0}^{1} \pi \operatorname{sen}(n\pi x)dx = \frac{2}{n}\Big(1 - (-1)^n\Big)$$

Concluimos que

$$SF_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\Big(1 - (-1)^n\Big)\operatorname{sen}(n\pi x)$$

Atendendo a que, para n par, $1 - (-1)^n = 0$, os termos de ordem par da série anterior são nulos:

$$SF_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2k-1} \operatorname{sen}\big((2k-1)\pi x\big)$$

Dado que tanto f como f' são funções seccionalmente contínuas em $[-1, 1]$ o teorema anterior permite-nos concluir que $SF_f(x)$ está bem definida para $x \in [-1, 1]$. Pela periodicidade das funções $\operatorname{sen}(n\pi x)$, é fácil de compreender que SF_f está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e que é periódica de período 2. De seguida mostra-se alguna gráficos das aproximações da série de Fourier da função f, isto é, o gráfico de alguns termos da sucessão das somas parciais

$$S_N f(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{4}{2k-1} \operatorname{sen}\big((2k-1)\pi x\big)$$

(para alguns valores de $N \in \mathbb{N}$).

Gráfico da função $(S_1 f)(x) = 4\operatorname{sen}(\pi x)$

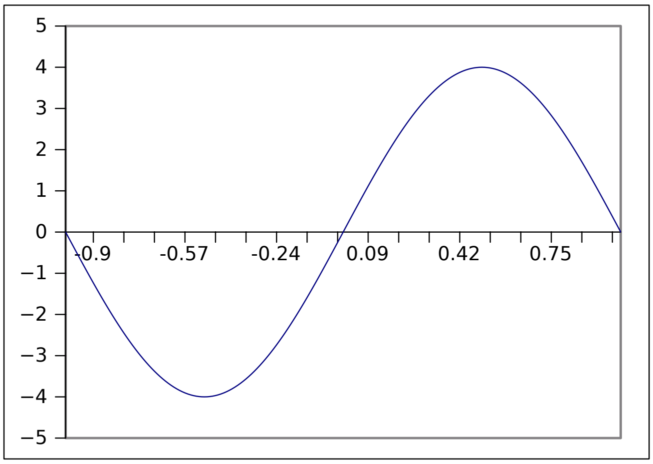

Figura 1.1: Aproximação $N = 1$

Gráfico da função $(S_2 f)(x) = 4\,\text{sen}(\pi x) + \frac{4}{3}\,\text{sen}(3\pi x)$

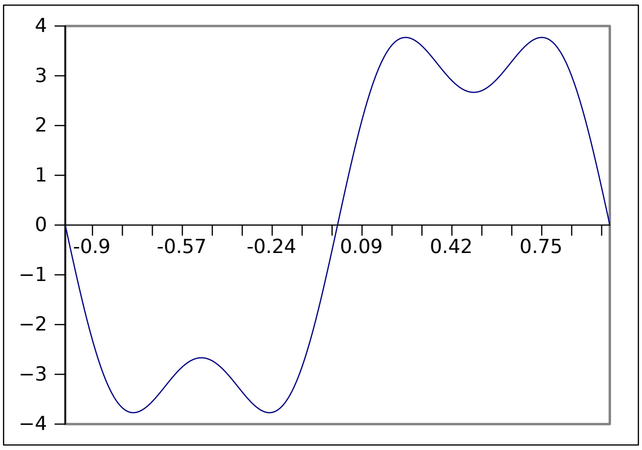

Figura 1.2: Aproximação $N = 2$

Gráfico da função $(S_3 f)(x) = 4\,\text{sen}(\pi x) + \frac{4}{3}\,\text{sen}(3\pi x) + \frac{4}{5}\,\text{sen}(5\pi x)$

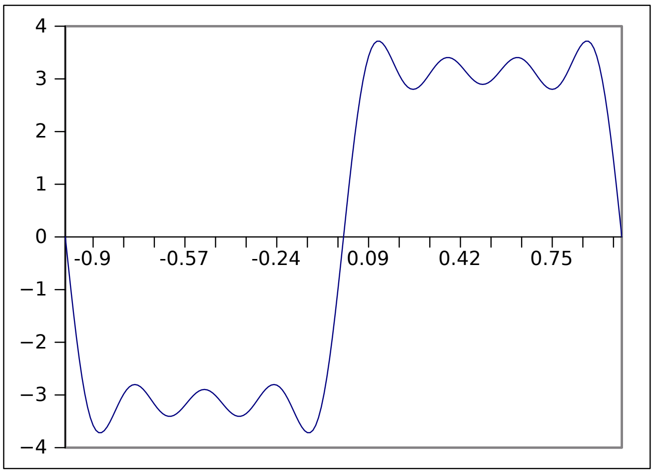

Figura 1.3: Aproximação $N = 3$

Gráfico da função $(S_5 f)(x) = 4\,\mathrm{sen}(\pi x) + \frac{4}{3}\,\mathrm{sen}(3\pi x) + \frac{4}{5}\,\mathrm{sen}(5\pi x) + \frac{4}{7}\,\mathrm{sen}(7\pi x) + \frac{4}{9}\,\mathrm{sen}(9\pi x)$

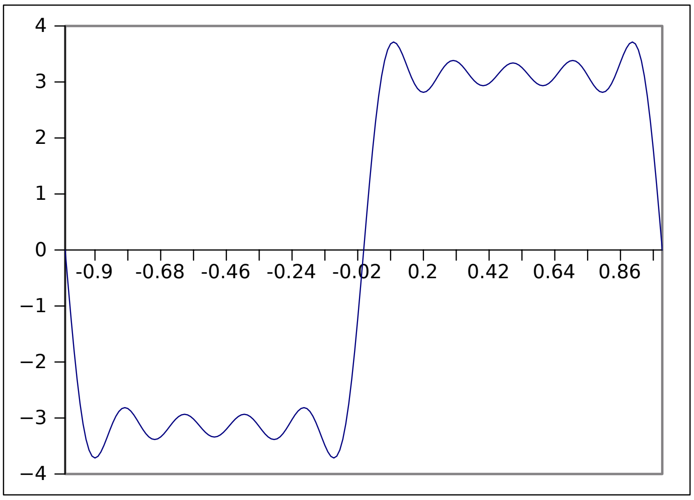

Figura 1.4: Aproximação $N = 5$

Gráfico da função $(S_{12} f)(x) = \sum_{n=1}^{12} \frac{4}{2n-1}\,\mathrm{sen}((2n-1)\pi x)$

Em $[-1, 1]$ a soma da série de Fourier da função f será dada por:

$$SF_f(x) = \begin{cases} -\pi & \text{se} \quad x \in]-1, 0[\\ \pi & \text{se} \quad x \in]0, 1[\\ 0 & \text{se} \quad x = \pm 1 \text{ ou } x = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Por ser uma função periódica de período 2, em $\mathbb{R}$ a soma da série de Fourier da função f será dada pela extensão periódica de período 2 da função definida em (1.5).

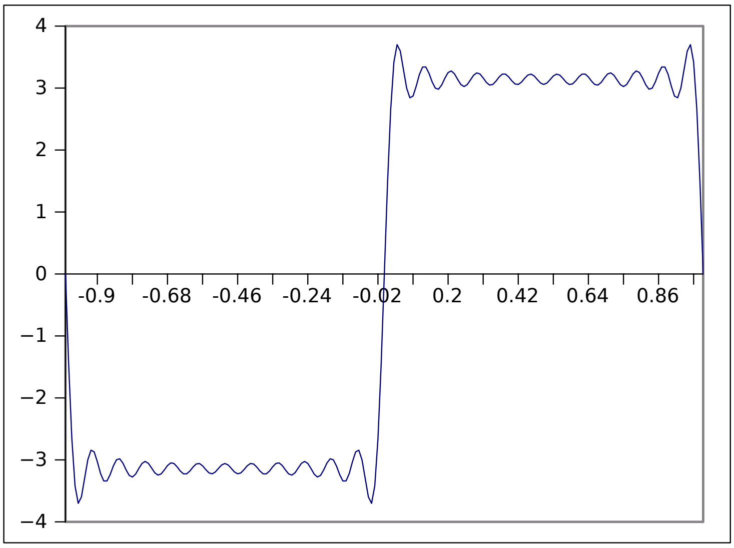

Figura 1.5: Aproximação $N = 12$

1.2.2 O Núcleo de Dirichlet e as Somas Parciais das Séries de Fourier

Vamos nesta secção tentar explicar a razão do comportamento oscilatório das somas parciais das séries de Fourier.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos o **núcleo de Dirichlet**, $D_N(x)$, como sendo a função trigonométrica:

$$D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos kx = \frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(Nx) \tag{1.6}$$

Verifica-se facilmente que $D_N(x)$ é uma função par e que:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\, dx = 1$$

Note também que:

$$\begin{aligned}
D_N(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos kx \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(e^{\mathrm{i}kx} + e^{-\mathrm{i}kx} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(e^{-\mathrm{i}Nx} + e^{-\mathrm{i}(N-1)x} + \cdots + e^{-\mathrm{i}x} + 1 + e^{\mathrm{i}x} + \cdots + e^{\mathrm{i}Nx} \right) \\
&= \frac{1}{2} e^{-\mathrm{i}Nx} \left(1 + e^{\mathrm{i}x} + e^{\mathrm{i}2x} + \cdots + e^{\mathrm{i}2Nx} \right) \\
&= \frac{1}{2} e^{-\mathrm{i}Nx} \sum_{k=0}^{2N} \left(e^{\mathrm{i}x} \right)^k
\end{aligned}$$

Como o somatório acima obtido não é mais do que a soma dos primeiros $2N+1$ termos da série geométrica de razão $e^{\mathrm{i}x}$, então:

$$\begin{aligned}
D_N(x) &= \frac{1}{2}\, e^{-\mathrm{i}Nx}\, \frac{1-(e^{\mathrm{i}x})^{2N+1}}{1-e^{\mathrm{i}x}} \\
&= \frac{e^{-\mathrm{i}(N+\frac{1}{2})x}}{2e^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\, \frac{1-e^{\mathrm{i}(2N+1)x}}{1-e^{\mathrm{i}x}} \\
&= \frac{e^{-\mathrm{i}(N+\frac{1}{2})x}-e^{\mathrm{i}(N+\frac{1}{2})x}}{2\mathrm{i}}\, \frac{1}{2}\, \frac{2\mathrm{i}}{e^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}-e^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}} \\
&= -\operatorname{sen}\Big((N+\tfrac{1}{2})x\Big)\, \frac{1}{2}\, \frac{1}{-\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\Big((N+\frac{1}{2})x\Big)}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

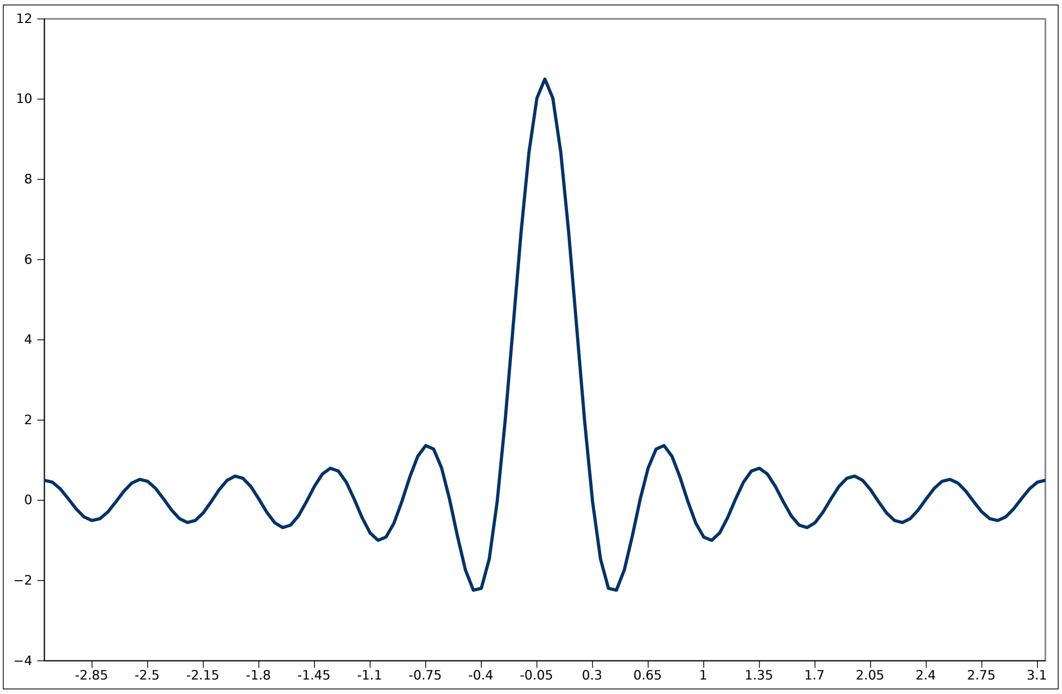

Figura 1.6: Gráfico de $D_{10}(x)$

Seja agora f uma função real, seccionalmente contínua em $[-\pi,\pi]$, e admitamos que f foi periodicamente extendida a $\mathbb{R}$. [3].

[3]Ou seja, dada $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ pode-se definir $f(y)$ para qualquer $y\in\mathbb{R}$ tendo em conta que existem $k\in\mathbb{Z}$ e $x\in[-\pi,\pi]$ tais que $y=x+2k\pi$; assim sendo, considera-se que $f(y)=f(x+2k\pi)\overset{def}{=}f(x)$. O que desta forma se obtém é, como se sabe, a extensão periódica de f a $\mathbb{R}$.

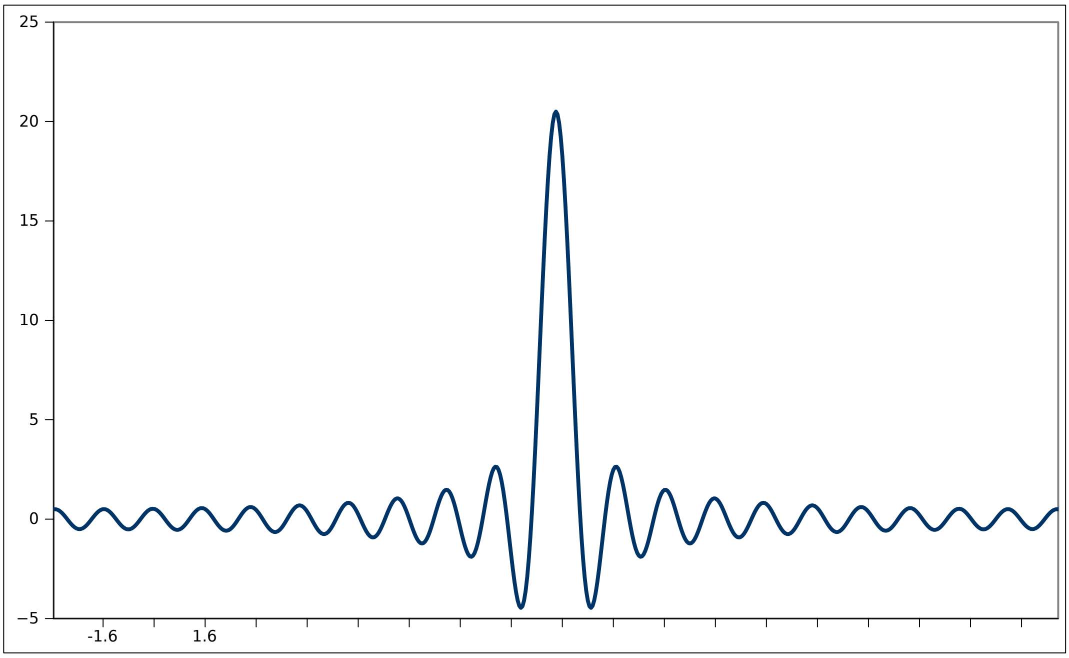

Figura 1.7: Gráfico de $D_{20}(x)$

A sucessão das somas parciais, $S_N(x)$, da série de Fourier de f é dada por:

$$\begin{aligned}
S_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2} f(y)\,dy + \sum_{k=1}^{N}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos ky\,dy\right)\cos kx + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\operatorname{sen} ky\,dy\right)\operatorname{sen} kx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(\cos ky\ \cos kx + \operatorname{sen} ky\ \operatorname{sen} kx\right)\right)dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos\left(k(y-x)\right)\right)dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(y-x)\,dy
\end{aligned}$$

Desta forma se deduziu uma fórmula integral para a sucessão das somas parciais da série de Fourier de f:

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_N(y-x)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\theta)D_N(\theta)\,d\theta, \tag{1.7}$$

O último integral foi obtido através da substituição de variável $y - x = \theta$ [4].

[4]Como a função $f(x+\theta)D_N(\theta)$ é periódica de período 2π, o integral entre $-\pi - x$ e $\pi - x$ é igual ao integral entre $-\pi$ e π.

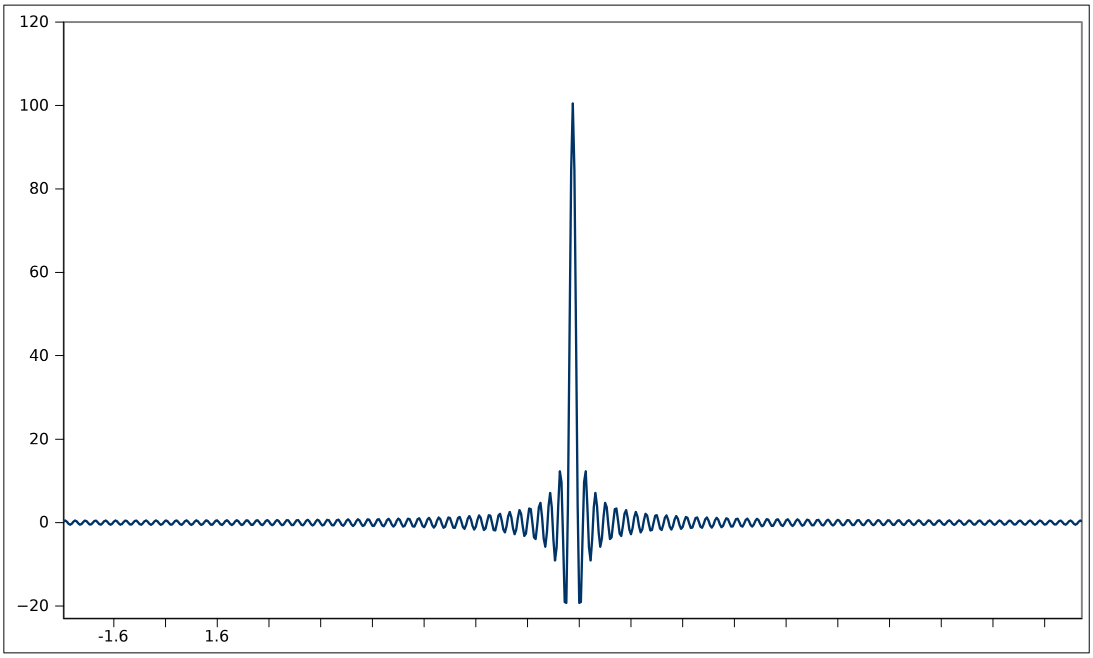

Figura 1.8: Gráfico de $D_{100}(x)$

A fórmula (1.7) diz-nos, grosso modo, que $S_N(x)$ é uma *"média ponderada"* de f numa vizinhança de x, em que os *"pesos"* são dados pelo núcleo de Dirichlet, $D_N(x)$. Note que a *"soma dos pesos"* é $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta)\, d\theta = 1$ [5]. Nas figuras (3.6), (3.7) e (3.8) representa-se os gráficos de $D_N(x)$ para alguns valores de N. Pode-se observar o comportamento oscilatório do núcleo de Dirichlet: à medida que N cresce, as oscilações de $D_N(x)$ aumentam em amplitude mas concentram-se junto de $x = 0$. Se f for seccionalmente C^1 então é possível provar, a partir da fórmula (1.7), que $S_N(x)$ converge da forma descrita pelo teorema da convergência pontual (equação (1.4)).

1.2.3 Série de Fourier de Senos

Sendo $L > 0$ e $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e de derivada seccionalmente contínua em $]0, L[$, pode-se associar a f a *série de senos*

$$S_{\text{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L})$$

em que

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) dx$$

Esta série é obtida, efectuando a extensão ímpar de f ao intervalo $[-L, L]$, e calculando a sua série de Fourier. Observe-se que se uma dada função g é ímpar, os coeficientes da série de Fourier

[5]Em rigor, o primeiro integral da equação (1.7) designa-se por convolução de f com D_N.

verificam:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx = 0 \quad , \quad \forall n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} g(x)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})dx$$

Pelo Teorema da convergência pontual das séries de Fourier e atendendo que se está a utilizar a extensão **ímpar** de f a $[-L, L]$, conclui-se que para $x \in [0, L]$

$$S_{\mathrm{sen}} f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{sendo} \quad x \text{ um ponto de continuidade de } f \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & \text{sendo} \quad x \text{ um ponto de descontinuidade de } f \\ 0 & \text{se} \quad x = L \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Exemplo:

Determinar a série de Fourier de senos da função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se} \quad x \in [0, 1[\\ 0 & \text{se} \quad x \in [1, 2][\end{cases}$$

A série de senos da função f em $[0, 2]$ será da forma

$$S_{\mathrm{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\mathrm{sen}\, \frac{n\pi x}{2}$$

em que

$$b_n = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}$$

Conclui-se que

$$S_{\mathrm{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{2}$$

Pelo Teorema da convergência pontual das séries de Fourier, tem-se que em $[-2, 2]$

$$S_{\mathrm{sen}} f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in]0, 2] \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ -f(-x) & \text{se} \quad x \in [-2, 0[\end{cases} \tag{1.8}$$

e em $\mathbb{R}$ a soma da série de senos da função f será a extensão periódica de período 4, de (1.8) a $\mathbb{R}$.

1.2.4 Série de Fourier de Cosenos

Sendo $L > 0$ e $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e de derivada seccionalmente contínua em $]0, L[$, pode-se associar a f a *série de Cosenos*

$$S_{\cos}f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{L})$$

em que

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx \quad , \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx$$

Esta série é obtida, efectuando a extensão par de f ao intervalo $[-L, L]$, e calculando a sua série de Fourier. Observe-se que se uma dada função g é par os coeficientes da série de Fourier verificam:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^L g(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^L g(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^L g(x)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})dx = 0 \quad \forall n \geq 0$$

Pelo Teorema da convergência pontual das séries de Fourier e atendendo que se está a utilizar a extensão **par** de f a $[-L, L]$, conclui-se que para $x \in [0, L]$

$$S_{\cos}f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{sendo} \quad x \text{ um ponto de continuidade de } f \\ \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{sendo} \quad x \text{ um ponto de descontinuidade de } f \\ \\ f(L) & \text{se } \ x = L \\ \\ f(0) & \text{se } \ x = 0 \end{cases}$$

Exemplo: Determinar a série de Fourier senos da função $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in [0, \frac{\pi}{4}[\\ 1 & \text{se} \quad x \in [\frac{\pi}{4}, \pi] \end{cases}$$

A série de cosenos da função g em $[0, \pi]$ será da forma

$$S_{\cos}g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

em que

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} dx = \frac{3}{2}$$

e para $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^\pi \cos(nx)dx = -\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}$$

Conclui-se que

$$S_{\cos}g(x) = \frac{3}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\cos(nx)$$

Pelo Teorema da convergência das séries de Fourier, tem-se que em $[-\pi, \pi]$

$$S_{\cos}g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\\ 1 & \text{se} \quad x \in [-\pi, -\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \pi] \\ 1/2 & \text{se} \quad x = \pm\frac{\pi}{4} \end{cases} \tag{1.9}$$

e em $\mathbb{R}$ a soma da série de cosenos da função g será a extensão periódica de período 2π, de (1.9) a $\mathbb{R}$.

1.3 Problema de Dirichlet Homogéneo para a Equação do Calor Unidimensional

Vamos resolver o problema de valores na fronteira e inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0\ ,\ x \in]0, \pi[\\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & x \in]0, \pi[\end{cases} \tag{1.10}$$

em que f é uma função seccionalmente contínua em $]0, \pi[$. Tal como deduzimos na Secção 1.1, a solução do problema (1.10) é dada por

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 K t}\operatorname{sen}(nx) \quad , \quad c_n \in \mathbb{R}$$

e para determinar as constantes $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ usaremos a condição inicial, pelo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(nx) = f(x) \tag{1.11}$$

1.3.1 Exemplo 1

Se a condição inicial for

$$f(x) = \operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(5x)$$

por (1.11),

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(nx) = \operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(5x)$$

e é então fácil de deduzir que

$$c_2 = 1 \quad , \quad c_5 = -3 \quad \text{e} \quad c_n = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2,5\}$$

Concluimos que a solução de (1.10) quando $f(x) = \operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(5x)$ é dada por

$$u(t,x) = e^{-4Kt}\operatorname{sen}(2x) - 3e^{-25Kt}\operatorname{sen}(5x)$$

1.3.2 Exemplo 2

Se a condição inicial for

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right| = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{se} \quad \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

por (1.11),

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(nx) = \frac{\pi}{2} - \left|\frac{\pi}{2} - x\right|$$

pelo que para determinar as constantes (c_n) precisamos de determinar a série de senos da função $f(x)$ em $[0,\pi]$. Assim

$$S_{\text{sen}}f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

em que

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[\int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen}(nx)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\operatorname{sen}(nx)\,dx\Big] = \frac{4}{\pi n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$$

Dado que a extensão periódica (de período 2π) a $\mathbb{R}$ da extensão ímpar de f ao intervalo $[-\pi,\pi]$ é contínua, tem-se que para todo $x \in [0,\pi]$

$$\frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\operatorname{sen}(nx)$$

pelo que se conclui que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$c_n = \frac{4}{\pi n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$$

e a solução de (1.10) quando $f(x) = \frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|$ é dada por

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} e^{-n^2Kt}\operatorname{sen}(nx)$$

1.4 Problema de Dirichlet não Homogéneo para a Equação do Calor Unidimensional

Vamos resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0 \ , \ x \in]0, L[\\ u(t,0) = T_1 \ \ , \ \ u(t,L) = T_2 & t > 0 \\ u(0,x) = f(x) & x \in]0, L[\end{cases} \tag{1.12}$$

em que T_1. T_2 são constantes. No contexto da equação do calor unidimensional, estas condições de fronteira significam que as extremidades da barra, 0 e L, são mantidas a temperatura constante, T_1 e T_2 respectivamente, durante todo o processo. Sendo estas constantes diferentes de zero, não podemos aplicar directamente o método de separação de variáveis. Temos então que considerar

$$u(t,x) = u_e(x) + v(t,x) \tag{1.13}$$

em que $u_e(x)$ é solução do problema de valores na fronteira

$$u_e'' = 0 \qquad , \qquad u_e(0) = T_1 \ \text{ e } \ u_e(L) = T_2$$

e $v(t,x)$ é solução do problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & t > 0 \ , \ x \in]0, L[\\ v(t,0) = 0 \ \ , \ \ v(t,L) = 0 & t > 0 \\ v(0,x) = f(x) - u_e(x) & x \in]0, L[\end{cases} \tag{1.14}$$

Vamos verificar em primeiro lugar que se $u(t,x)$ é da forma dada em (1.13) então é solução de (1.12). De facto, utilizando a linearidade da derivada

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = K\frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2} + K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = K u_e'' + K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 + \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u_e}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

pelo que verifica a equação diferencial de (1.12). Por outro lado

$$u(t,0) = u_e(0) + v(t,0) = T_1 + 0 = T_1 \ \text{ e } \ u(t,L) = u_e(L) + v(t,L) = T_2 + 0 = T_2$$

pelo que verifica as condições de fronteira de (1.12). Finalmente

$$u(0,x) = u_e(x) + v(0,x) = u_e(x) + f(x) - u_e(x) = f(x)$$

pelo que verifica a condição inicial de (1.12). Conclui-se que $u(t,x)$ dada em (1.13) é solução de (1.12). A função $u_e(x)$ é denominada uma solução estacionária de (1.12), pois não depende de t.

A equação $u_e'' = 0$ tem como solução $u_e(x) = Ax + B$. Dado que $u_e(0) = T_1$ e $u_e(L) = T_2$ conclui-se que

$$u_e(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

Por outro pela Secção 1, dado que (1.14) é o problema da equação do calor com condições de fronteira de Dirichlet homogéneas

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

em que para todo $n \in \mathbb{N}$, (c_n) são os coeficientes da série de senos da função $f(x) - \frac{T_2 - T_1}{L}x - T_1$ em $[0, L]$, isto é

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \Big(f(x) - \frac{T_2 - T_1}{L}x - T_1\Big) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \tag{1.15}$$

Concluimos que a solução de (1.12) é dada por

$$u(t,x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

com (c_n) dados por (1.15).

1.5 Problema de Neumann Homogéneo para a Equação do Calor Unidimensional

Resolveremos o problema de valores na fronteira e inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0\ ,\ x \in]0, L[\\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = f(x) & x \in]0, L[\end{cases} \tag{1.16}$$

isto é, vamos estudar a propagção de calor numa barra de comprimento L em que não há troca de calor com o exterior pelas suas extremidades (o significado das condições de Neumenn $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0$ é que o fluxo de calor através da fronteira do corpo, que neste caso são os pontos $x = 0$ e $x = L$, é nulo).

Observa-se que se $f(x) \equiv 0$ então a solução de (1.16) é $u(t,x) \equiv 0$. Se f não é identicamente nula então u tambem não o será.

Vamos utilizar o método de separação de variáveis para determinar soluções do problema (1.16) da forma

$$u(t,x) = T(t)X(x)$$

Pela observação acima feita, nem $T(t)$ nem $X(x)$ poderão ser identicamente nulas. Substituindo na equação diferencial, tal como nos casos anteriores

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(T(t)X(x)\Big) = K\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(T(t)X(x)\Big) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{KT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Observe-se que, separadas as variáveis, pretende-se que **para todos** $t > 0$ e $x \in]0, L[$ uma função de t ($\frac{T'(t)}{KT(t)}$) iguale uma função de x ($\frac{X''(x)}{X(x)}$). Para que tal se verifique é necessário que ambos igualem uma constante, isto é, para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{T'(t)}{KT(t)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Por outro lado, atendendo às condições de fronteira

- $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=0$ implica $T(t)X'(0)=0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X'(0)=0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer (implicaria $u\equiv 0$) tem-se que $X'(0)=0$.
- $\frac{\partial u}{\partial x}(t,L)=0$ implica $T(t)X'(L)=0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X'(L)=0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer, tem-se que $X'(L)=0$.

Temos então dois problemas para resolver — correspondentes a duas equações diferenciais ordinárias

$$(\mathbf{P1})\ \begin{cases} X''-\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(L)=0 \end{cases} \quad , \quad (\mathbf{P2})\ T'=\lambda K T$$

Começamos por resolver o problema **(P1)**. Trata-se de um problema de valores próprios e para os determinar teremos que encontra as soluções não nulas de **(P1)**. Assim

$$X''-\lambda X=0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2-\lambda)X=0$$

Teremos então três casos possíveis:

$\lambda=0$ — A equação é $D^2X=0$ o que implica $X(x)=Ax+B,\ A,\ B\in\mathbb{R}$;

$\lambda>0$ ($\lambda=\mu^2$) — A equação é $(D-\mu)(D+\mu)X=0$ o que implica $X(x)=Ae^{\mu x}+Be^{-\mu x}$;

$\lambda<0$ ($\lambda=-\omega^2$) — A equação é $(D+\mathrm{i}\omega)(D-\mathrm{i}\omega)X=0$ o que implica $X(x)=A\operatorname{sen}(\omega x)+B\cos(\omega x)$;

O caso $\lambda>0$ combinado com as condições de fronteira, produz apenas a solução nula. Conclui-se que qualquer $\lambda>0$ não é valor próprio de **(P1)**.
Para o caso $\lambda=0$ obtém-se $X(x)=Ax+B$ que combinado com as condições de fronteira, produz $X(x)=B$. Pelo que $\lambda=0$ é valor próprio de **(P1)** associado à funçã própria $X_0(x)=1$
Para o caso $\lambda<0$, tem-se que

$$X'(0)=0 \ \Rightarrow\ A=0$$
$$X'(L)=0 \ \Rightarrow\ B\omega\operatorname{sen}(\omega x)=0$$

pelo que,

$$B=0 \qquad \Rightarrow \qquad X(x)\equiv 0$$

ou

$$\operatorname{sen}(\omega L)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega=\frac{n\pi}{L} \qquad \Rightarrow \qquad X(x)=\cos\frac{n\pi x}{L}, \quad \text{com } n\in\mathbb{N}$$

Temos assim que $\lambda=0$, com $X(x)=1$ e $\lambda=-\omega^2=-\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ e $X(x)=\cos\frac{n\pi x}{L}$, para $n\in\mathbb{N}$, são os valores próprios e as correspondentes funções próprias associadas.

Para resolver o problema **(P2)**, utilizaremos apenas os valores próprios de **(P1)**, dado que para outros valores de λ a única solução de **(P1)** é a nula. Assim, para $\lambda=0$

$$T'=0 \qquad \Rightarrow \qquad T_0(t)=1$$

e para cada $n\in\mathbb{N}$

$$T'=-\frac{n^2\pi^2}{L^2}KT \qquad \Rightarrow \qquad T_n(t)=e^{-\frac{n^2\pi^2K}{L^2}t}$$

Resolvidos **(P1)** e **(P2)**, podemos concluir que as solução da equação do calor unidimensional, da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$, que verificam condições de fronteira de Dirichlet nulas são as funções da forma

$$u_0(t,x) = T_0(t)X_0(x) = c_0 \quad \text{e} \quad u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Então

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(t,x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad , \quad c_n \in \mathbb{R}$$

é solução da equação do calor unidimensional que verifica condições de fronteira de Neumann nulas. Para determinar as constantes c_n teremos que utilizar a condição de fronteira $u(0,x) = f(x)$. Resulta então que:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x) \tag{1.17}$$

Concluindo-se que as constantes c_n são os coeficientes da série de cosenos de f em $[0,L]$, ou seja

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)dx$$

e para cada $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

1.6 Unicidade de Solução do Problema de Dirichlet para a Equação do Calor

Admitamos agora que $u(t,x)$ e $\hat{u}(t,x)$ são duas funções de classe C^1 na variável t e de classe C^2 na variável x [6] que satisfazem o problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = K \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0 \, , \; x \in]0,L[\\[2ex] u(t,0) = T_1 \, , \; u(t,L) = T_2 & t > 0 \\[2ex] u(0,x) = f(x) & x \in]0,L[\end{cases}$$

Então $v(t,x) = u(t,x) - \hat{u}(t,x)$ satisfaz o problema homogéneo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = K \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & t > 0 \, , \; x \in]0,L[\\[2ex] v(t,0) = v(t,L) = 0 & t > 0 \\[2ex] v(0,x) = 0 & x \in]0,L[\end{cases} \tag{1.18}$$

[6] Dizemos, por exemplo, que $u(t,x)$ é de classe C^1 na variável t se para qualquer $x_0 \in [0,L]$, a função $\varphi(t) = u(t,x_0)$ é de classe C^1.

Multiplicando a equação do calor (1.18) por v e integrando em x no intervalo $[0, L]$, obtém-se:

$$\int_0^L v\frac{\partial v}{\partial t}\,dx = K\int_0^L v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx$$

Integrando o segundo membro por partes, e usando as condições iniciais [7] em (1.18), obtém-se:

$$\begin{aligned}\int_0^L v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx &= K\left(v(t,0)\,\tfrac{\partial v}{\partial x}(t,0) - v(t,L)\,\tfrac{\partial v}{\partial x}(t,L) - \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx \right)\\ &= -K\int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx \le 0\end{aligned}$$

Quanto ao primeiro membro:

$$\int_0^L v\frac{\partial v}{\partial t}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L 2v\frac{\partial v}{\partial t}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\Big(v(t,x)\Big)^2 dx = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L \Big(v(t,x)\Big)^2 dx$$

Definido $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \big(v(t,x)\big)^2 dx$, então conclui-se dos resultados anteriores que $\dfrac{dE}{dt} \le 0$. Por outro lado, pela condição inicial $E(0) = 0$; além disso, $E(t) \ge 0$, para qualquer $t \ge 0$. Assim sendo, teremos necessariamente que $E(t) \equiv 0$, donde se conclui que:

$$v(t,x) \equiv 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad u(t,x) \equiv \hat{u}(t,x).$$

1.7 A Equação das Ondas

Um outro exemplo de equação diferencial parcial de extrema relevância física é a equação das ondas (linear). No mundo da física, os fenómenos ondulatórios são comuns: os exemplos óbvios são as perturbações na superfície de um fluído, as vibrações de cordas em instrumentos musicais, a as perturbações de pressão no ar que consistem na propagação de som, e a radiação electromagnética. Se a amplitude das perturbações for suficientemente pequena e regular, a variável de perturbação $u(x,t)$ associada às ondas verifica a equação das ondas (linear)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2\Delta u$$

onde $u(t,x)$ é uma função da posição e do tempo que descreve o comportamento da onda e c é a velocidade de propagação da onda no meio em questão.

1.7.1 Problema da Corda Vibrante

A equação das ondas unidimensional pode ser usada como modelo matemático de uma corda vibrante.

Considere-se o problema de ondas (não forçadas) numa corda de comprimento finito L, com posição e velocidade inicial dadas e extremidades fixas.

[7] Este mesmo argumento pode ser usado para provar unicidade de solução para o problema de Neumann; no caso de condições de fronteira de Neumann, teremos $\frac{\partial v}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial v}{\partial x}(t,L) = 0$ em vez de $v(t,0) = v(t,L) = 0$.

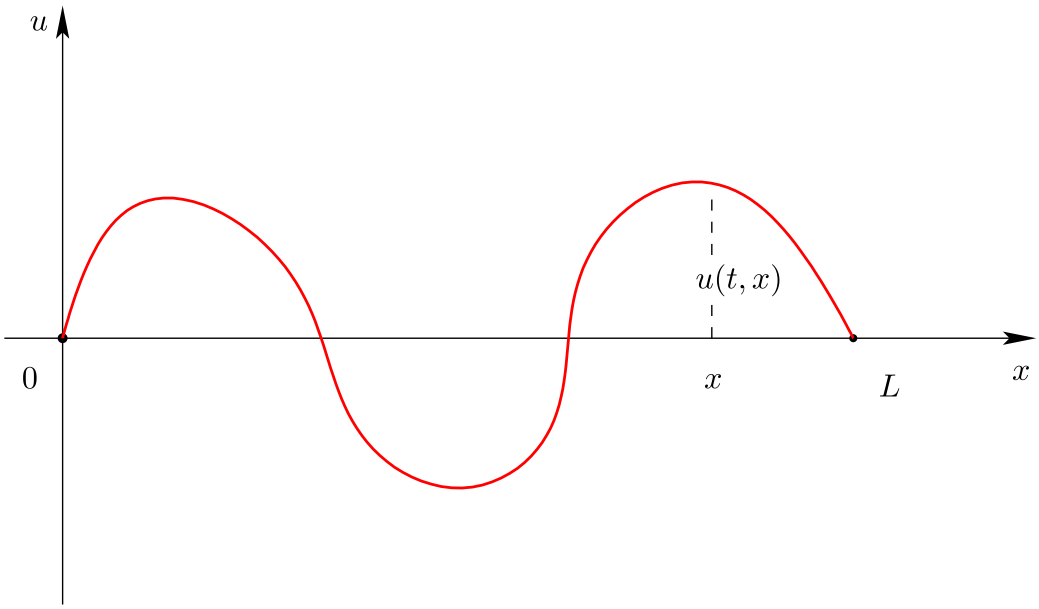

Figura 1.9: Problema da corda vibrante

Pretende-se então encontrar o deslocamento $u(t,x)$ verificando o problema de valores na fronteira e inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0 \ , \ x \in]0, L[\\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = f(x) & x \in]0, L[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x) & x \in]0, L[\end{cases} \tag{1.19}$$

Começamos por notar que se $f(x) \equiv 0$ e $g(x) \equiv 0$ então a solução de (1.19) é $u(t,x) \equiv 0$. Se f ou g não são identicamente nulas então u tambem não o será.

Tal como para a resolução da equação do calor unidimensional, e dado que estamos a considerar condições de fronteira homogéneas, vamos utilizar o método de separação de variáveis para determinar soluções do problema (1.19) da forma

$$u(t,x) = T(t)X(x)$$

Pela observação acima feita, nem $T(t)$ nem $X(x)$ poderão ser identicamente nulas. Substituindo na equação diferencial obtém-se

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(T(t)X(x)\Big) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(T(t)X(x)\Big) \Leftrightarrow T''(t)X(x) = c^2 T(t)X''(x) \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Observe-se que, separadas as variáveis, pretende-se que **para todos** $t > 0$ e $x \in]0, L[$ uma função de t ($\frac{T''(t)}{c^2 T(t)}$) iguale uma função de x ($\frac{X''(x)}{X(x)}$). Para que tal se verifique é necessário que ambos igualem uma constante, isto é, para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Por outro lado, atendendo às condições de fronteira e possíveis condições iniciais nulas (note que pelo que já foi referido apenas uma delas o poderá ser)

- $u(t,0) = 0$ implica $T(t)X(0) = 0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X(0) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer (implicaria $u \equiv 0$) tem-se que $X(0) = 0$.

- $u(t,L) = 0$ implica $T(t)X(L) = 0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X(L) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer, tem-se que $X(L) = 0$.

Temos então dois problemas para resolver - correspondentes a duas equações diferenciais ordinárias

$$(\mathbf{P1}) \ \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \quad , \quad (\mathbf{P2}) \ T'' = \lambda c^2 T$$

Começamos por resolver o problema **(P1)**, que é um problema de valores próprios. Assim:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - \lambda)X = 0$$

Teremos então três casos possíveis:

$\lambda = 0$ — A equação é $D^2X = 0$ o que implica $X(x) = Ax + B$, A, $B \in \mathbb{R}$;

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) — A equação é $(D-\mu)(D+\mu)X = 0$ o que implica $X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$;

$\lambda < 0$ ($\lambda = -\omega^2$) — A equação é $(D - \mathrm{i}\omega)(D + \mathrm{i}\omega)X = 0$ o que implica $X(x) = A\,\mathrm{sen}(\omega x) + B\cos(\omega x)$;

Os casos $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$, combinados com as condições de fronteira, produzem apenas a solução nula. Conclui-se que qualquer $\lambda \geq 0$ não é valor próprio de **(P1)**. Para o caso $\lambda < 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} X(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad B = 0 \\ X(L) = 0 \quad &\Rightarrow \quad A\,\mathrm{sen}(\omega x) = 0 \end{aligned}$$

pelo que,

$$A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X(x) \equiv 0$$

ou

$$\mathrm{sen}(\omega L) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{n\pi}{L} \qquad \Rightarrow \qquad X(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}, \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}$$

Temos assim que $\lambda = -\omega^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ e $X(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}$, para $n \in \mathbb{Z}$, são os valores próprios e as correspondentes funções próprias associadas. Note que para os índices n inteiros negativos repetem-se os valores próprios e as funções próprias (a menos de combinação linear). Conclui-se que qualquer λ que não seja da forma $-\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ (para algum $n \in \mathbb{N}$) não é valor próprio de **(P1)**, e para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ é valor próprio de **(P1)** associado à função própria $X_n(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}$.

Para resolver o problema **(P2)**, utilizaremos apenas os valores próprios de **(P1)**, dado que para outros valores de λ a única solução de **(P1)** é a nula. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$T'' + \frac{n^2\pi^2}{L^2}c^2 T = 0 \quad \Rightarrow \quad (D^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}c^2)T = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n(t) = \alpha_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L} + \beta_n \cos\frac{n\pi ct}{L}$$

Resolvidos **(P1)** e **(P2)**, podemos concluir que as soluções da equação das ondas unidimensional, da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$, que verificam condições de fronteira de Dirichlet nulas são as funções da forma

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\Big(\alpha_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L} + \beta_n \cos\frac{n\pi ct}{L}\Big) \quad , \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.20}$$

Por sobreposição, a solução da equação diferencial que satisfaz as condições de fronteira será:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\Big(\alpha_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L} + \beta_n \cos\frac{n\pi ct}{L}\Big).$$

Utilizando a condição inicial $u(0,x) = f(x)$, resulta que:

$$\beta_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Utilizando a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$, resulta que

$$\frac{n\pi c}{L}\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

ou seja:

$$\alpha_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Procuremos agora as denominadas *soluções de d'Alembert* para a equação das ondas. Atendendo às igualdades trigonométricas

$$\operatorname{sen}(a)\,\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big) \quad , \quad \operatorname{sen}(a)\,\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)\Big)$$

podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{2}\Big(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}(x-ct) + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}(x+ct)\Big)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{2}\Big(\cos\frac{n\pi}{L}(x-ct) - \cos\frac{n\pi}{L}(x+ct)\Big)$$

Pela definição dos coeficientes das séries de Fourier de senos (α_n) e (β_n) se, em $[0,L]$, f e g forem funções contínuas com derivadas seccionalmente contínuas, teremos

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \quad \text{e} \quad \bar{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{L}\alpha_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

onde $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\bar{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são as extensões periódicas das extensões ímpares de f e g a $[-L, L]$. Resulta então que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} = \frac{1}{2}\Big(\bar{f}(x-ct) + \bar{f}(x+ct)\Big).$$

Da mesma forma:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{L} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{n\pi}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{L} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi\alpha_n}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{L} \Big) ds \\ &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \bar{g}(s) ds. \end{aligned}$$

Finalmente, a solução do problema pode ser escrita na forma

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big(\bar{f}(x-ct) + \bar{f}(x+ct)\Big) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \bar{g}(s) ds$$

Para ilustrar, vamos considerar o exemplo em que $L = 1$, $c = 1$, a posição inicial, $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ e a velocidade inicial $g(x) = 0$. Temos assim que a solução do problema de vaores na fronteira e inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0 \ , \ x \in]0,1[\\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = \operatorname{sen}(\pi x) & x \in]0,1[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 & x \in]0,1[\end{cases} \tag{1.21}$$

é

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sen} \pi(x-t) + \operatorname{sen} \pi(x+t) \Big)$$

1.8 Equação de Laplace Bidimensional

A equação de Laplace bidimensional é a equação diferencial parcial de segunda ordem, linear

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

assim chamada em homenagem ao influente matemático francês do século XVIII, Pierre-Simon Laplace. Esta equação, assim como as suas versões em dimensões superiores, é sem dúvida uma das mais importantes equações diferenciais da física e da matemática. Como vimos, as soluções reais desta equação são denominadas *funções harmónicas*.

A versão não homogénea da equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

é conhecida como a *equação de Poisson*, em homenagem Siméon-Denis Poisson, que foi aluno de Laplace.

Para além da sua importância teórica, as equações de Laplace e Poisson surgem como as soluções estacionárias numa grande variedade de modelos físicos. Por exemplo, $u(x, y)$ pode ser interpretada como o deslocamento de uma membrana e $f(x, y)$ representa uma força externa que actua sobre a superfície da membrana. Outro exemplo é o equilíbrio térmico de placas: neste caso, $u(x, y)$ representa a temperatura e $f(x, y)$ uma fonte de calor externa. Na mecânica de fluidos, $u(x, y)$ representa a função potencial cujo gradiente $v = \nabla u$ é o vector velocidade do um de um fluido cujo fluxo é invariante por translações segundo uma certa direcção. Esta mesma *teoria do potencial* é aplicável à electrostática bidimensional e aos potenciais gravitacionais.

Uma vez que a equação de Laplace — e, também, a de Poisson — descrevem situações estacionárias, elas surgem associadas a problemas de valor na fronteira. Note-se que as equações do calor e das ondas — que descrevem sistemas físicos que evoluem com o tempo — estão associadas a problemas de valor na fronteira e de valor inicial.

Procuramos uma solução, $u(x, y)$, para a equação de Laplace — definida para (x, y) numa região aberta e limitada, $D \subset \mathbb{R}^2$ — que satisfaz certas condições quando (x, y) pertence à fronteira do conjunto D. Observamos que no caso bidimensional a fronteira de D é constituída por uma ou mais curvas simples e fechadas. Como já referido, os tipos mais importantes de condições de fronteira são

- **Condições de Dirichlet**: que especificam o valor de $u(x, y)$ na fronteira do domínio

  $$u(x.y) = h(x, y) \quad , \quad \text{para} \;\; (x, y) \in \partial D$$

  para certa função h conhecida.

- **Condições de Neumann**: na qual é especificada a derivada de u segundo a normal na fronteira do domínio

  $$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = k(x, y) \quad , \quad \text{para} \;\; (x, y) \in \partial D$$

  para certa função j conhecida, e $\mathbf{n}$ representa a normal unitária exterior à fronteira de D.

1.8.1 Problema de Dirichlet Semi-Homogéneo para a Equação de Laplace

Vamos resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in]0, a \; , \; y \in]0, b[\\ u(x, 0) = f(x) \;\; , \;\; u(x, b) = 0 & x \in]0, a[\\ u(0, y) = u(a, y) = 0 & y \in]0, b[\end{cases} \tag{1.22}$$

Observa-se que se $f(x) \equiv 0$ a solução de (1.22) é $u(x, y) \equiv 0$. Por outro lado, pode-se provar que se f não for identicamente nula então u também não o será. Tal como nos exemplos anteriores, e tendo em conta que este problema tem 3 condições de fronteira homogéneas e um domínio rectangular, o método de separação de variáveis consiste na determinação de soluções **não nulas** do problema (1.22) da forma:

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \tag{1.23}$$

Note que nem $X(x)$ nem $Y(y)$ poderão ser identicamente nulas, pois caso contrário u(x,y) também o será. Substituindo (1.23) na equação diferencial obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(X(x)Y(y)\Big) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(X(x)Y(y)\Big) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}\end{aligned}$$

Observe-se que as variáveis aparecem separadas: pretende-se que **para todos** os $x \in]0,a[$ e $y \in]0,b[$, $\frac{X''(x)}{X(x)}$, que é função apenas de x, iguale $-\frac{Y''(y)}{Y(y)}$, que é função apenas de y. Para que tal se verifique é necessário que ambos os membros sejam iguais a uma constante; isto é, para $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad \text{e} \quad -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

Por outro lado, atendendo às condições de fronteira nulas

- $u(0,y) = 0$ implica $X(0)Y(y) = 0$ e como tal ou $Y(y)$ é a função identicamente nula ou $X(0) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer (implicaria $u \equiv 0$) tem-se que $X(0) = 0$.

- $u(a,y) = 0$ implica $X(a)Y(y) = 0$ e como tal ou $Y(y)$ é a função identicamente nula ou $X(a) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer, tem-se que $X(a) = 0$.

- $u(x,b) = 0$ implica $X(x)Y(b) = 0$ e como tal ou $X(x)$ é a função identicamente nula ou $Y(b) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer (implicaria $u \equiv 0$) tem-se que $Y(b) = 0$.

Temos então dois problemas para resolver, envolvendo cada um deles uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem:

$$(\mathbf{P1}) \quad \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \quad , \quad (\mathbf{P2}) \quad \begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(b) = 0 \end{cases}$$

Começamos por resolver o problema **(P1)**, que é um problema de valores próprios. Assim:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - \lambda)X = 0$$

Teremos então três casos possíveis:

$\lambda = 0$ — A equação é $D^2X = 0$ o que implica $X(x) = Ax + B,\ A,\ B \in \mathbb{R}$;

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) — A equação é $(D-\mu)(D+\mu)X = 0$ o que implica $X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$;

$\lambda < 0$ ($\lambda = -\omega^2$) — A equação é $(D - \mathrm{i}\omega)(D + \mathrm{i}\omega)X = 0$ o que implica $X(x) = A\,\mathrm{sen}(\omega x) + B\cos(\omega x)$;

Como vimos no estudo da equação do calor, os casos $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$, combinados com as duas condições de fronteira nulas, produzem apenas a solução nula. Conclui-se que qualquer $\lambda \geq 0$ não é valor próprio de **(P1)**. Para o caso $\lambda < 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ X(a) = 0 &\Rightarrow A \operatorname{sen}(\omega x) = 0 \end{aligned}$$

pelo que,

$$A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X(x) \equiv 0$$

ou

$$\operatorname{sen}(\omega a) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{n\pi}{a} \qquad \Rightarrow \qquad X(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}, \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}$$

Temos assim que $\lambda = -\omega^2 = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ e $X(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}$, para $n \in \mathbb{Z}$, são os valores próprios e as correspondentes funções próprias associadas. Note que para os índices n inteiros negativos repetem-se os valores próprios e as funções próprias (a menos de combinação linear). Conclui-se que qualquer λ que não seja da forma $-\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ (para algum $n \in \mathbb{N}$) não é valor próprio de **(P1)**, e para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ é valor próprio de **(P1)** associado à função própria $X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}$.

Para resolver o problema **(P2)**, utilizaremos apenas os valores próprios de **(P1)**, dado que para outros valores de λ a única solução de **(P1)** é a nula. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$Y'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(D^2 - \frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_n(y) = a_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + b_n e^{-\frac{n\pi y}{a}},$$

onde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. As soluções que satisfazem a condição $Y(b) = 0$ são as soluções de

$$a_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + b_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} = 0\,,$$

ou seja,

$$b_n = -a_n e^{\frac{2n\pi b}{a}}$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, as soluções de **(P2)** são:

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= a_n\left(e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{\frac{2n\pi b}{a}}e^{-\frac{n\pi y}{a}}\right) \\ &= a_n e^{\frac{n\pi b}{a}}\left(e^{\frac{-n\pi b}{a}}e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{\frac{n\pi b}{a}}e^{-\frac{n\pi y}{a}}\right) \\ &= 2a_n e^{\frac{n\pi b}{a}}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{n\pi(y-b)}{a}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{n\pi(y-b)}{a}}\right) \\ &= \alpha_n \operatorname{sh}\frac{n\pi(y-b)}{a}, \qquad \text{onde } \alpha_n = 2a_n e^{\frac{n\pi b}{a}} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Resolvidos **(P1)** e **(P2)**, podemos concluir que um conjunto de soluções linearmente independentes da equação de Laplace bidimensional, da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$, que verificam as condições de fronteira homogéneas, é constituído pelas funções:

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\ \operatorname{sh}\frac{n\pi(y-b)}{a} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.24}$$

Podemos agora procurar uma solução da equação diferencial que satisfaça todas as condições de fronteira recorrendo ao princípio da sobreposição:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\ \operatorname{sh}\frac{n\pi(y-b)}{a}$$

Da condição de fronteira não nula, $u(x,0)=f(x)$, resulta que:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\,\mathrm{sh}\left(-\frac{n\pi b}{a}\right)\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{a}=-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi b}{a}\;\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{a}.$$

Então, para cada $n\in\mathbb{N}$, os coeficientes α_n são obtidos à custa dos coeficientes da série de senos de f em $[0,a]$ por

$$-\alpha_n\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi b}{a}=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{a}\,dx.$$

ou

$$\alpha_n=-\frac{2}{a\,\mathrm{sh}(n\pi b/a)}\int_0^a f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{a}\,dx.$$

1.8.2 Problema de Dirichlet não Homogéneo para a Equação de Laplace

Consideremos agora o problema de valores na fronteira relativo à equação de Laplace com condições de Dirichlet não homogéneas. Pretende-se determinar uma solução de

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & x\in]0,a\;,\;y\in]0,b[\\[2ex] u(x,0)=f_1(x)\;\;,\;\;u(x,b)=f_2(x) & x\in]0,a[\\[2ex] u(0,y)=f_3(y)\;\;,\;\;u(a,y)=f_4(y) & y\in]0,b[\end{cases}\tag{1.25}$$

Pelo princípio da sobreposição, a solução de (1.25) pode ser escrita na forma

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{4}u_1(x,y)$$

em que u_1 é solução de

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & x\in]0,a\;,\;y\in]0,b[\\[2ex] u(x,0)=f_1(x)\;\;,\;\;u(x,b)=0 & x\in]0,a[\\[2ex] u(0,y)=0\;\;,\;\;u(a,y)=0 & y\in]0,b[\end{cases}$$

u_2 é solução de

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & x\in]0,a\;,\;y\in]0,b[\\[2ex] u(x,0)=0\;\;,\;\;u(x,b)=f_2(x) & x\in]0,a[\\[2ex] u(0,y)=0\;\;,\;\;u(a,y)=0 & y\in]0,b[\end{cases}$$

u_3 é solução de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in]0, a \ , \ y \in]0, b[\\ \\ u(x,0) = 0 \ \ , \ \ u(x,b) = 0 & x \in]0, a[\\ \\ u(0,y) = f_3(y) \ \ , \ \ u(a,y) = 0 & y \in]0, b[\end{cases}$$

e u_4 é solução de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in]0, a \ , \ y \in]0, b[\\ \\ u(x,0) = 0 \ \ , \ \ u(x,b) = 0 & x \in]0, a[\\ \\ u(0,y) = 0 \ \ , \ \ u(a,y) = f_4(y) & y \in]0, b[\end{cases}$$

A solução de cada um destes problemas é obtida pelo método utilizado na resolução de (1.22).