Teoremas da Divergência e de Stokes
Notas Sobre as Aulas Teóricas

João Teixeira, Maria João Borges

1º Semestre de 2022/23

Índice

1 Teoremas da Divergência e de Stokes **5**

1.1 Superfícies em $\mathbb{R}^3$ . . . 5

1.1.1 Introdução . . . 5

1.1.2 Definições de Superfície . . . 6

1.1.3 Plano Tangente e Recta Normal . . . 10

1.1.4 Exemplos . . . 11

1.2 Integral de Superfície . . . 16

1.2.1 Produto Externo . . . 16

1.2.2 Definição do Integral de Superfície . . . 17

1.2.3 Aplicações e Exemplos . . . 20

1.3 Alguns Operadores Diferenciais . . . 22

1.3.1 Divergência . . . 22

1.3.2 Rotacional . . . 24

1.4 Teorema da Divergência . . . 25

1.4.1 Fluxo de um Campo Vectorial . . . 25

1.4.2 Teorema da Divergência (ou de Gauss) . . . 27

1.4.3 Demonstração do Teorema da Divergência . . . 31

1.4.4 Exemplos . . . 35

1.5 Teorema de Stokes . . . 36

1.5.1 Superfícies Orientáveis . . . 36

1.5.2 Bordo de uma Superfície . . . 38

1.5.3 Teorema de Stokes para Superfícies Elementares . . . 43

1.5.4 Teorema de Stokes Generalizado . . . 46

1.5.5 Exemplos . . . 46

1.5.6 Potencial Vectorial . . . 50

Capítulo 1

Teoremas da Divergência e de Stokes

1.1 Superfícies em $\mathbb{R}^3$

1.1.1 Introdução

Reconhecemos os objectos visíveis como tridimensionais. No entanto, alguns deles podem ser descritos de formas mais simples. Embora se possa admitir que tudo existe num espaço tridimensional (modelado por $\mathbb{R}^3$), um fio — desde que a sua secção seja desprezável face ao comprimento — pode ser representado por uma curva. Recordamos que

$$g(t) \;=\; \big(x(t), y(t), z(t)\big), \qquad \text{para } t \in [a, b]$$

designa uma parametrização de uma curva. A curva diz-se unidimensional porque g é função de apenas **uma** variável real livre (neste caso, t). Um fio é, na prática, medido em termos de comprimento — o que é característico de uma curva.

Analogamente, uma folha de papel pode ser percepcionada como um objecto bidimensional, pois a sua espessura é desprezável face ao seu comprimento e largura. Embora uma folha seja, em rigor, tridimensional, a sua medida é, na prática, apresentada como uma área — o que é característico de uma superfície. Uma parametrização de uma superfície em $\mathbb{R}^3$,

$$g(t, s) \;=\; \big(x(t, s), y(t, s), z(t, s)\big) \qquad \text{para } t \in \,]a, b[\text{ e } s \in \,]c, d[\,,$$

é uma função que depende de **duas** variáveis reais (neste caso, t e s) conseguindo por isso representar um conjunto bidimensional.

Exemplo: Superfícies de Revolução.

Considere a curva dada por $\gamma(t) = \big(x(t), z(t)\big)$, $t \in [a, b]$, que está contida no conjunto $\big\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x > 0, z \in \mathbb{R}\big\}$. Seja S a superfície gerada pela rotação da em torno do eixo dos z de γ, que pode ser parametrizada por:

$$g(t, \theta) \;=\; \big(x(t)\cos\theta,\, x(t)\operatorname{sen}\theta,\, z(t)\big),$$

com $t \in \,]a, b[$ e $\theta \in \,]0, 2\pi[$.

Para um exemplo específico, considere a parábola γ parametrizada por $\gamma(t) = \big(x(t), z(t)\big) = (t, t^2)$, com $t \in \,]1, 2[$; a superfície de revolução S gerada por $\gamma(t)$ — girando-a em torno do eixo dos z — é parametrizada por:

$$g(t, \theta) = \big(t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta, t^2\big) \quad , \quad (t, \theta) \in \,]1, 2[\times \,]0, 2\pi[$$

É evidente que a parametrização, g, de uma superfície tem que depender efectivamente das duas variáveis; escrevendo isto com mais rigor, vamos exigir que g seja injectiva numa vizinhança de qualquer ponto do seu domínio.

Exemplo: Conjunto de Revolução que não é Superfície.

Considere a curva dada por $\gamma(t) = \big(x(t), t\big)$, com $t \in [-1, 1]$, onde

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se} \quad 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad -1 < t \leq 0 \end{cases}$$

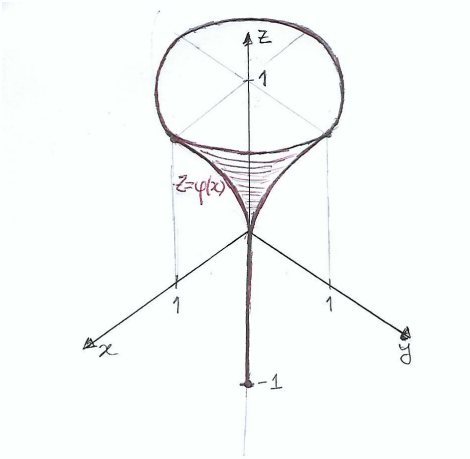


Figura 1.1: O conjunto de revolução gerado pela curva $\gamma(t) = \big(x(t), t\big)$ é uma superfície para $z > 0$; esta superfície degenera numa curva para $z < 0$.

O conjunto de revolução gerada por esta curva,

$$g(t, \theta) = \big(x(t)\cos\theta, x(t)\,\mathrm{sen}\,\theta, t\big), \qquad (t, \theta) \in \,]-1, 1[\times]0, 2\pi[\,,$$

é uma superfície apenas para $0 < t < 1$, ou seja, $z > 0$. Para qualquer $t \leq 0$, $g(t, \theta) = (0, t)$ é independente de θ, pelo que a superfície degenera numa curva abaixo do plano xOy.

1.1.2 Definições de Superfície

Comecemos pelo exemplo mais simples de uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Consideremos o plano que passa no ponto

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

e é perpendicular ao vector

$$\mathbf{v} = (a, b, c).$$

$\mathbf{v}$ diz-se um *vector normal* ao plano.

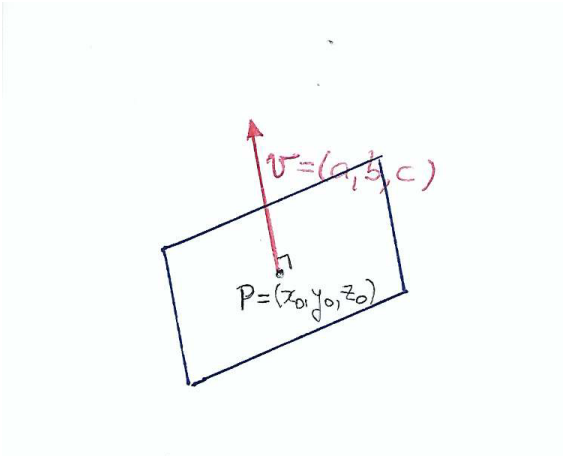


Figura 1.2: Plano definido por um ponto e um vector normal.

Um ponto arbitrário $P = (x, y, z)$ do plano deve satisfazer:

$$\mathbf{v} \cdot (P - P_0) = 0$$

ou seja

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{ax + by + cz + d}_{\stackrel{\text{def}}{=} F(x,y,z)} = 0$$

onde d é o número real dado por $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Qualquer plano admite pois uma representação como curva de nível 0 de uma certa função $F(x, y, z)$.

Se (por exemplo) $c \neq 0$, podemos resolver a equação $F(x, y, z) = 0$ em ordem a z, obtendo-se a representação do plano como gráfico de uma função:

$$z = -\tfrac{a}{c}\, x - \tfrac{b}{c}\, y - \tfrac{d}{c} \tag{1.1}$$

Note que c é, em particular, igual ao valor de $\frac{\partial F}{\partial z}(P)$.

Como $\mathbf{v}$ deve ser um vector não nulo, então pelo menos um dos números a,b ou c é diferente de 0. No caso em que $c = 0$ mas a [ou b] é diferente de 0 podemos, de forma análoga, resolver $F(x, y, z) = 0$ em ordem a x [ou y].

Podemos ainda escrever a representação (1.1) na forma de uma *parametrização*

$$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -\frac{a}{c}t - \frac{b}{c}s - \frac{d}{c} \end{cases}$$

ou seja,

$$(x, y, z) = g(t, s),$$

onde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é dada por

$$g(t, s) = \left(t, s, -\tfrac{a}{c}\, t - \tfrac{b}{c}\, s - \tfrac{d}{c}\right).$$

Trata-se de uma parametrização muito especial: os *parâmetros* t e s são, de facto, duas das variáveis cartesianas — neste caso, x e y, respectivamente. Isto mostra que a representação de

um plano (ou de qualquer outra superfície) como gráfico de uma função é um caso particular de uma parametrização.

Em geral, podemos definir uma superfície como sendo um conjunto de nível 0 de uma dada função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1:

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : F(\mathbf{x}) = 0 \right\}.$$ [1]

Se o teorema da função implícita for aplicável à equação $F(\mathbf{x}) = 0$ então, numa vizinhança de qualquer ponto α de S, pode-se escrever uma variável em função das outras duas (que designamos por *variáveis livres*). Vejamos, em detalhe, essa explicitação.

Admitindo a superfície S definida por

$$F(x, y, z) = 0$$

e assumindo que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in S$, se

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\alpha) \neq 0$$

então o teorema da função implícita garante a existência de $f : V \to \mathbb{R}$ de classe C^1, onde V é uma vizinhança de α, tal que

$$z = f(x, y);$$

em particular, $\alpha_3 = f(\alpha_1, \alpha_2)$. Note que esta fórmula define a superfície numa vizinhança do ponto $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; ou seja, o domínio de f, V, é uma vizinhança de $(x, y) = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Identicamente, se

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha) \neq 0 \qquad \left[\text{resp. } \frac{\partial F}{\partial y}(\alpha) \neq 0\right]$$

então o teorema da função implícita assegura a existência de vizinhanças $\tilde{V}$ e $\hat{V}$ de α e $\tilde{f} : \tilde{V} \to \mathbb{R}$ [resp. $\hat{f} : \hat{V} \to \mathbb{R}$] de classe C^1 tal que

$$x = \tilde{f}(y, z) \qquad \left[\text{resp. } y = \hat{f}(x, z)\right].$$

Estas fórmulas definem S numa vizinhança do ponto $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; ou seja, o domínio de $\tilde{f}$, $\tilde{V}$, é uma vizinhança de $(y, z) = (\alpha_2, \alpha_3)$ [resp., o domínio de $\hat{f}$, $\hat{V}$, é uma vizinhança de $(x, z) = (\alpha_1, \alpha_3)$].

Desta forma, se exigirmos que F satisfaça a condição

$$\nabla F(\mathbf{x}) \neq 0 \qquad \forall \mathbf{x} \in S, \tag{1.2}$$

então pelo menos uma das derivadas parciais

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(\alpha) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(\alpha)$$

terá que ser diferente de zero. Esta é a condição necessária à aplicação do teorema da função implícita na vizinhança de qualquer $\alpha \in S$: se a condição (1.2) se verificar, então é sempre possível

[1] Podia-se pensar que seria mais geral definir uma superfície como sendo um conjunto de nível $C \in \mathbb{R}$ dado por $F(\mathbf{x}) = C$. Porém, é evidente que $F(\mathbf{x}) = C \Leftrightarrow F(\mathbf{x}) - C = 0$ e, por isso, não há perda de generalidade na definição das superfícies como conjuntos de nível 0.

escrever (localmente) uma das variáveis em função das outras duas, obtendo-se assim (pelo menos) uma representação de S na forma do gráfico de uma função: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$ ou $x = h(y, z)$. Tal como vimos para os planos, estas representações são exemplos particulares de *parametrizações de* S.

Vejamos agora o que é, exactamente, uma parametrização de uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$. Trata-se de representar S como sendo a imagem por uma função

$$g : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$

de classe C^1, onde o domínio de g, T, é uma vizinhança de (t_0, s_0) e $g(t_0, s_0) = P \in S$. Exigimos, adicionalmente, que as duas colunas de $Dg(t_0, s_0)$ sejam linearmente independentes. A função g designa-se por *parametrização de* S. A parametrização está definida localmente, no sentido em que a mesma será válida numa vizinhança do um dado ponto $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$.

Representando as componentes de g por

$$g(t, s) = \big(x(t, s), y(t, s), z(t, s)\big)$$

então

$$Dg = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix},$$

sendo que, pela hipótese acima enunciada, Dg tem característica máxima (que é 2) em qualquer ponto da superfície S.

Sem perda de generalidade, pode-se sempre admitir que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}(t_0, s_0) & \frac{\partial x}{\partial s}(t_0, s_0) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(t_0, s_0) & \frac{\partial y}{\partial s}(t_0, s_0) \end{bmatrix} \neq 0. \tag{1.3}$$

Dado que $Dg(t_0, s_0)$ tem duas linhas linearmente independentes, se o determinante (1.3) fosse nulo podia-se reduzir ao caso em que o mesmo é não nulo por permutação das variáveis x, y, z. Seja $g(t, s) = \big(x(t, s), y(t, s)\big)$. Pelo teorema da função inversa (em $\mathbb{R}^2$), a função g tem inversa de classe C^1

$$(t, s) = \varphi(x, y)$$

definida numa vizinhança de $(x_0, y_0) = \big(x(t_0, s_0), y(t_0, s_0)\big)$. Assim sendo:

$$z \;=\; z(t, s) \;=\; z\big(\varphi(x, y)\big) \;=\; (z \circ \varphi)(x, y) \;\overset{\text{def}}{=}\; f(x, y)$$

nessa mesma vizinhança. Definindo $F(x, y, z) = z - f(x, y)$, então S é dada pela conjunto de nível 0

$$F(x, y, z) = 0$$

numa vizinhança de P.

Este resultado, porém, é apenas local, e as hipóteses que exigimos não garantem que seja válido em todo o domínio, T, da parametrização. Para que tal se verifique, exigimos adicionalmente que $g : T \to S$ seja injectiva (logo invertível em todo o T) e que a inversa $g^{-1} : S = g(T) \to T$ seja contínua. Uma função nestas condições designa-se um *homeomorfismo* de T para S [2]

[2] A noção de homeomorfismo captura formalmente a ideia de que vizinhanças de um ponto $(u, v) \in T$ são transformadas por g em vizinhaças do ponto $g(u, v) \in S$, **mas também** o contrário: vizinhanças de um ponto $\mathbf{x} = g(u, v) \in S$ são transformadas por $g^{-1} : g(T) \to T$ em vizinhanças do ponto $(u, v) \in T$.

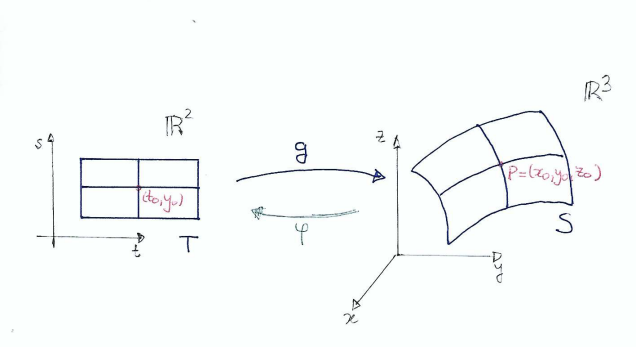


Figura 1.3: Superfície definida através de uma parametrização

Isto mostra que podemos definir uma superfície em $\mathbb{R}^3$ da forma que se segue.

Definição (Superfície em $\mathbb{R}^3$): Diz-se que $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície se, para qualquer ponto $\mathbf{a} \in S$, existe uma bola centrada em $\mathbf{a}$, $B(\mathbf{a})$ tal que o subconjunto $S \cap B(\mathbf{a})$ da superfície (que se diz uma vizinhança de $\mathbf{a}$ em S) pode ser descrito de uma das seguintes formas:

(1) Como **conjunto de nível** 0 de uma função de classe C^1 $F : A \to \mathbb{R}$ (onde $A \subset \mathbb{R}^3$ é aberto e $\mathbf{a} \in A$) e que verifica $\nabla F \neq 0$ em A:

$$S \cap B(\mathbf{a}) \;=\; \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : F(\mathbf{x}) = 0\Big\}.$$

(2) Como **gráfico** de uma função; por exemplo $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$S \cap B(\mathbf{a}) \;=\; \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\Big\}$$

(identicamente para gráficos $x = f(y,z)$ ou $y = f(x,z)$).

(3) Como imagem por uma **parametrização** $g : T \to \mathbb{R}^3$ (onde $T \subset \mathbb{R}^2$ é aberto e o ponto $\mathbf{a}$ pertence ao contradomínio de g) injectiva, de classe C^1, com inversa contínua e tal que $Dg(t,s)$ tem característica 2 para qualquer $(t,s) \in T$:

$$S \cap B(\mathbf{a}) \;=\; \Big\{g(t,s) : (t,s) \in T\Big\} = g(T)$$

Uma superfície (conforme aqui está definida) é um exemplo de uma variedade de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$.

1.1.3 Plano Tangente e Recta Normal

Admitamos que a superfície S é dada, numa vizinhaça de $\mathbf{a} \in S$ por uma parametrização g e como conjunto de nível 0 de F. Usando a notação da secção anterior:

$$S \cap B(\mathbf{a}) \;=\; g(T) \qquad \text{e} \qquad S \cap B(\mathbf{a}) \;=\; \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : F(\mathbf{x}) = 0\Big\}.$$

Assim

$$(x,y,z) \in S \cap B(\mathbf{a}) \quad \Leftrightarrow \quad \exists (t,s) \in T \text{ tal que } (x,y,z) = g(t,s)$$

$$(x,y,z) \in S \cap B(\mathbf{a}) \quad \Leftrightarrow \quad F(x,y,z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F\big(g(t,s)\big) = 0.$$

Usando o teorema da derivada da função composta no ponto $\mathbf{a} = g(t_0, s_0)$

$$\nabla F\big(g(t_0, s_0)\big)\, Dg(t_0, s_0) = 0.$$

Isto significa que o vector gradiente $\nabla F\big(g(t_0, s_0)\big) = \nabla F(\mathbf{a}) \neq 0$ é ortogonal a ambas as colunas de $Dg(t_0, s_0)$. Dito de outra forma, o espaço linear gerado pelo vector $\nabla F(\mathbf{a})$ (que é de dimensão 1) é ortogonal ao espaço linear gerado pelas colunas de $Dg(t_0, s_0)$. Este espaço é de dimensão 2 pois Dg tem sempre característica 2. Resta agora associar estes espaços a, respectivamente, a recta normal e o plano tangente a S no ponto $\mathbf{a}$.

Consideremos os caminhos γ_1, γ_2 dados por

$$\gamma_1(t) = g(t, s_0)$$

$$\gamma_2(s) = g(t_0, s)$$

(definidos em vizinhanças apropriadas de t_0 e s_0, respectivamente). Ambos os caminhos são de classe C^1 (pois g também é) e, por definição, as curvas correspondentes pertencem a S (pois os seus pontos satisfazem a parametrização de S). Ora, um vector tangente a γ_1 (e, consequentemente, a S) em $\mathbf{a}$ é, precisamente, a primeira coluna de $Dg(t_0, s_0)$; identicamente, um vector tangente a γ_2 (e, consequentemente, a S) em $\mathbf{a}$ é a segunda coluna de $Dg(t_0, s_0)$.

Assim sendo, o espaço linear gerado pelas duas colunas de $Dg(t_0, s_0)$ dá-nos as direcções tangentes à superfície S em $\mathbf{a}$; designamos abreviadamente esses vectores por T_1 e T_2.

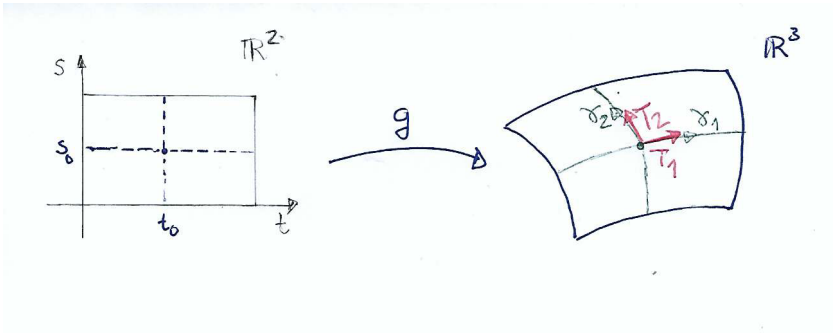


Figura 1.4: Direcções tangentes a uma superfície.

Por sua vez, o espaço linear gerado pelo vector $\nabla F(\mathbf{a})$ dá-nos a direcção normal à superfície S em $\mathbf{a}$. Assim sendo, os pontos $\mathbf{x}$ do *plano tangente* a S em $\mathbf{a}$ pode ser dado por

$$(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot N = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2, \;\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Os pontos da recta normal podem, por sua vez, ser dados por:

$$\begin{cases} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot T_1 = 0 \\ (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot T_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda N, \;\; \lambda \in \mathbb{R}$$

1.1.4 Exemplos

(1) Considere-se a superfície do parabolóide

$$P \;=\; \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z < 1\Big\}.$$

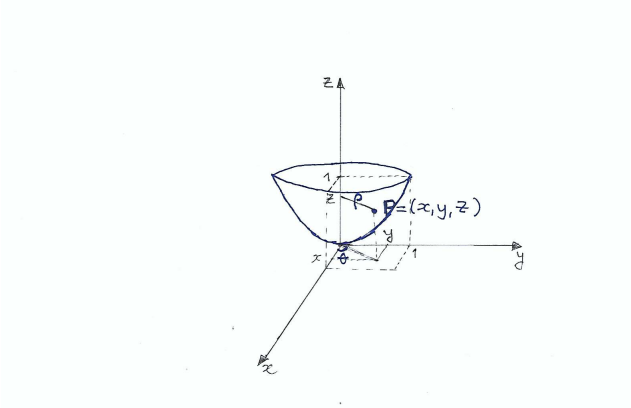


Figura 1.5: Parabolóide $z = x^2 + y^2$, com $z < 1$, e coordenadas cilíndricas.

Trata-se do conjunto de nível 0 de $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$, sendo que

$$\nabla F(x, y, z) \;=\; \big(-2x, -2y, 1\big) \;\neq\; 0 \qquad\qquad \forall (x, y, z) \in S.$$

Podemos também definir P como o gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$; para tal, resolvendo $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = z - f(x, y) = 0$ em ordem a z:

$$z = f(x, y), \qquad \text{para } \; (x.y) \in B_1(0, 0).$$

Para obter uma parametrização relativamente simples, podemos usar do facto de que o eixo Oz é um eixo de rotação deste parabolóide. Recorrendo assim a coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho^2 \end{cases} \qquad \text{onde } \; \theta \in]0, 2\pi[\;\text{ e }\; \rho \in]0, 1[,$$

ou seja, a parametrização é a função injectiva de classe C^1

$$g(\rho, \theta) = \big(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, \rho^2\big).$$

A matriz jacobiana de g,

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho \cos\theta \\ 2\rho & 0 \end{bmatrix}$$

verifica (por exemplo)

$$\det \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho \cos\theta \end{bmatrix} \;=\; \rho \cos^2\theta + \rho \operatorname{sen}^2\theta = \rho \neq 0.$$

Assim sendo Dg tem característica 2, mas apenas no seu domínio (que não inclui a origem). Isto não decorre de qualquer problema com a superfície — de facto, existe plano tangente ao parabolóide na origem — mas da falta de injectividade das coordenadas cilíndricas nos pontos em que $\rho = 0$ (o eixo dos z).

Uma parametrização que evita este problema é

$$h(x, y) = (x, y, x^2 + y^2), \qquad\qquad \text{dada em} \quad B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\big\}$$

Trata-se de uma função injectiva e de classe C^1. Além disso,

$$Dh(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$$

tem característica 2. O parabolóide P é, pois, uma superfície.

Vamos então usar esta última parametrização para calcular o plano tangente e a recta normal a P na origem. Dois vectores tangentes linearmente independentes são as colunas de $Dh(0,0)$:

$$T_1 = (1,0,0), \qquad T_2 = (0,1,0),$$

Um vector normal é

$$\nabla F(0,0,0) = (0,0,1).$$

O plano tangente a P na origem é

$$(x,y,z)\cdot(0,0,1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$$

e a recta normal a P na origem é

$$(x,y,z) = \lambda(0,0,1), \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

(ou seja, o eixo dos z).

(2) Considere-se a superfície do cone

$$C = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2}, z < 1\Big\}.$$

Ao contrário do exemplo anterior, C não é superfície em qualquer conjunto que contenha a origem. Vejamos porquê.

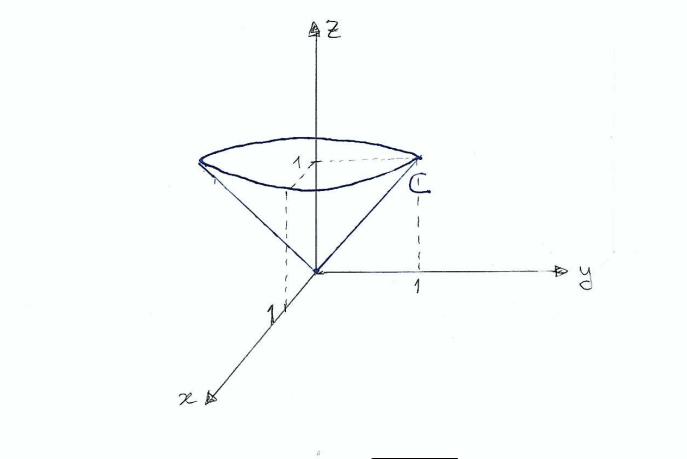


Figura 1.6: Cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, com $z < 1$.

Por exemplo, representando C como o conjunto de nível 0 da função

$$F(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2},$$

ou seja, $F(x,y,z)=0$. Vê-se facilmente que F não é diferenciável na origem! Contudo, podemos evitar a não diferenciabilidade da função raiz quadrada tomando, no lugar de F:

$$G(x,y,z)=z^2-x^2-y^2.$$

Note que C satisfaz $z^2-x^2-y^2=0$, ou seja, é o conjunto de nível 0 de G. Esta função é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. No entanto,

$$\nabla G=\big(-2x,-2y,2z\big)\ \neq\ 0$$

excepto, precisamente, em $(0,0,0)$.

Representando como gráfico $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ também não resulta (na origem), pois f não é diferenciável em $(0,0)$.

Quanto à parametrização com coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z=\rho \end{cases} \qquad \text{onde } \ \theta\in\,]0,2\pi[\ \text{ e } \ \rho\in\,]0,1[\,,$$

também a sua matriz jacobiana não tem característica 2 na origem.

De facto, o cone C não tem plano tangente ao seu vértice — que é a origem. Isto mostra que C só é uma superfície se lhe retirarmos o vértice.

(3) Consideremos a esfera $S\subset\mathbb{R}^3$ definida por $x^2+y^2+z^2=4$.

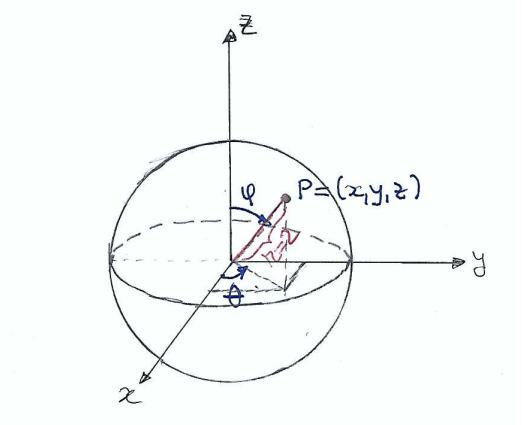


Figura 1.7: Esfera $x^2+y^2+z^2=4$ e coordenadas esféricas.

Trata-se do conjunto de nível 0 da função de classe C^1

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4.$$

Ora

$$\nabla F(x,y,z)=\big(2x,2y,2z\big)\ \neq\ 0,$$

pois o gradiente de F só se anula em $(0,0,0)\notin S$. Trata-se, pois, de uma superfície.

Consideremos o ponto $(0,0,2)$ e calculemos, utilizando apenas F, a recta normal e o plano tangente a S nesse ponto. Como

$$\nabla F(0,0,2) = (0,0,4),$$

um vector normal pode ser $N = (0,0,1)$. Assim, a recta normal a S em $(0,0,2)$ é o eixo dos zz.

Por outro lado, os dois vectores tangentes devem ser ortogonais a N, ou seja, devem verificar $T \cdot N = 0$. Fazendo $T = (a,b,c)$:

$$(a,b,c)\cdot(0,0,1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 0 \text{ e } a,b \in \mathbb{R}.$$

O em espaço linear gerado pelos vectores tangentes a S em $(0,0,2)$ é constituído pelos vectores

$$T = a\underbrace{(1,0,0)}_{\shortparallel T_1} + b\underbrace{(0,1,0)}_{\shortparallel T_2}.$$

A equação (vectorial) do plano tangente a S em $(0,0,2)$ é

$$(x,y,z) = (0,0,2) + \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) = (\lambda_1,\lambda_2,2), \quad \forall \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Trata-se do plano horizontal $z = 2$.

Uma parametrização de S que costuma ser útil resulta das coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = 2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y = 2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ z = 2\cos\varphi \end{cases} \qquad \text{onde } \theta \in]0,2\pi[\text{ e } \varphi \in]0,\pi[\,.$$

Temos pois $g : T \to S$, com $T = \big\{(\theta,\varphi) : \theta \in]0,2\pi[\text{ e } \phi \in]0,\pi[\,\big\}$ e

$$g(\theta,\varphi) \;=\; \Big(2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\, 2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\, 2\cos\varphi\Big).$$

A matriz jacobiana de g,

$$Dg(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} -2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & 2\cos\varphi\cos\theta \\ 2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta & 2\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ 0 & -2\operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix},$$

tem característica 2 (exercício); note que $g(T) = S \setminus \big\{(x,0,z) : x \geq 0\big\}$. Mas pode-se usar a mesma fórmula para g mas definida (por exemplo) em

$$T_2 = \big\{(\theta,\varphi) : \theta \in]-\pi,\pi[\text{ e } \phi \in]0,\pi[\,\big\}.$$

Neste caso, $g(T_2) = S \setminus \big\{(x,0,z) : x \leq 0\big\}$.

Note que falta ainda "cobrir" o pólo norte, $(0,0,2)$ e o pólo sul, $(0,0,-2)$, da esfera com parametrizações. Porém, alterando apropriadamente a definição de T, podem-se obter parametrizações que funcionem em vizinhanças destes pontos (exercício).

1.2 Integral de Superfície

1.2.1 Produto Externo

Sejam $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dois vectores de $\mathbb{R}^3$. O **produto externo** de $\mathbf{a}$ por $\mathbf{b}$, denotado por $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, é definido por:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \big(a_2b_3 - a_3b_2,\, a_3b_1 - a_1b_3,\, a_1b_2 - a_2b_1\big) \\ &= \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1}_{\| \text{ def}} \\ &\qquad \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Este *determinante formal* é introduzido para facilitar a memorização da fórmula que define o produto externo.

Propriedades Elementares do Produto Externo

a) $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$.

b) $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

c) Com $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

d) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$ e $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$
(ou seja, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são ambos ortogonais a $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$).

e) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$.

f) Denotando as componentes de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ por $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \Big(\det \Delta^T \Delta\Big)^{1/2}, \qquad \text{onde} \qquad \Delta = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

g) Sendo $\theta \in [0, \pi[$ o ângulo formado pelos vectores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, então

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \;=\; \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\,\operatorname{sen}\theta.$$

Demonstração. Deixamos a prova (muito simples!) das alíneas a), b) e c) para o aluno. Note que d) decorre directamente de c). Para provar e) calculamos o primeiro e o segundo membro da identidade em termos das componentes de $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2; \end{aligned}$$

em seguida, o aluno pode verificar (com paciência, usando a álgebra que aprendeu no Secundário) que estas expressões são idênticas.

Vejamos agora que f) e g) decorrem directamente de e). Começando por f):

$$\begin{aligned}
\det \Delta^T \Delta &= \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \end{bmatrix} \\
&= \|\mathbf{a}\|^2 \, \|\mathbf{b}\|^2 - \big(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\big)^2 = \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2.
\end{aligned}$$

Quanto a g),

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \\
&= \|\mathbf{a}\|^2 \, \|\mathbf{b}\|^2 - \big(\, \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos\theta\big)^2 \\
&= \|\mathbf{a}\|^2 \, \|\mathbf{b}\|^2 \left(1 - \cos^2\theta\right) = \|\mathbf{a}\|^2 \, \|\mathbf{b}\|^2 \operatorname{sen}^2\theta.
\end{aligned}$$

□

Observemos que $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2$ é, precisamente, o quadrado da área do paralelogramo com lados formados pelos vectores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, que é igual a $\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \operatorname{sen}^2\theta = \det \Delta^T\Delta$ (ver figura abaixo).

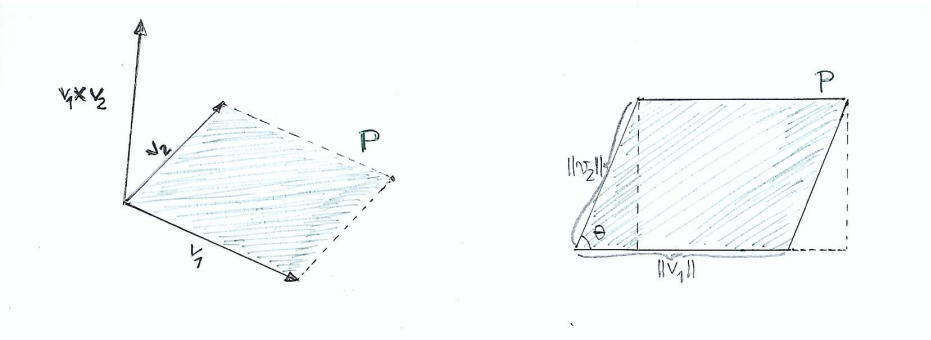


Figura 1.8: A área de um paralelogramo cujos lados são dados pelos vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ é, precisamente, $\|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_2\| \operatorname{sen}\theta = \|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|$.

1.2.2 Definição do Integral de Superfície

Definição [Área de uma superfície]: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície e $g : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma

parametrização de S. Então a área de S é dada por:

$$\begin{aligned} Vol_2(S) &= \int_T \left\| \frac{\partial g}{\partial t} \times \frac{\partial g}{\partial s} \right\| dt\, ds \\ &= \int_T \sqrt{\det Dg(t,s)^T Dg(t,s)}\, dt\, ds \end{aligned}$$

A última igualdade decorre da propriedade e) do produto externo — equação (1.4).

Esta definição estabelece que a área de S é o limite — quando o diâmetro da partição de T tende para zero — das somas das áreas dos paralelogramos cujos lados são os seguintes vectores tangentes a S no ponto $g(t,s)$:

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\,\Delta t \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial g}{\partial s}(t,s)\,\Delta s.$$

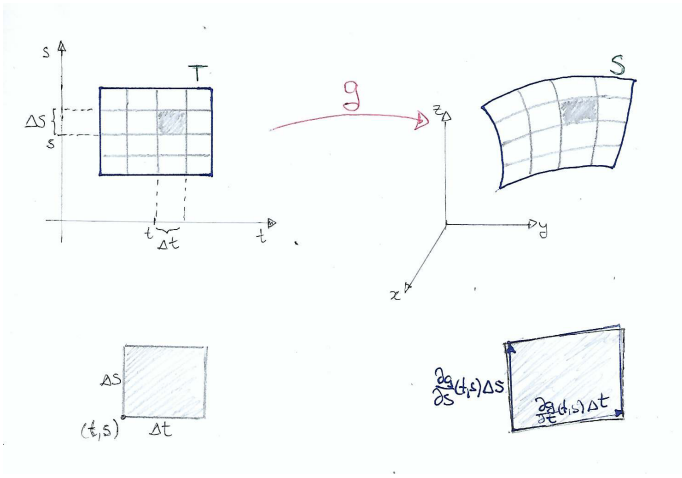


Figura 1.9: Motivação para a definição de integral de uma superfície, S, parametrizada por $g : T \to S$. Os elementos de área (um por cada rectângulo da partição de T) são paralelogramos cujos lados são os vectores tangentes a S. Tomando o limite quando Δt e Δs de cada rectângulo tendem para 0, obtém-se a área de S como o limite das somas das áreas dos paralelogramos.

Para definir o integral de superfície de um campo escalar utilizamos a medida da área de uma superfície, conforme o que acima foi feito.

Integral de superfície: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície e $g : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização de S. Seja ainda $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar. O integral de ϕ em S é:

$$\begin{aligned} \int_S \phi\, dS &= \int_T \phi\big(g(t,s)\big) \left\| \frac{\partial g}{\partial t} \times \frac{\partial g}{\partial s} \right\| dt\, ds \\ &= \int_T \phi\big(g(t,s)\big) \sqrt{\det Dg(t,s)^T Dg(t,s)}\, dt\, ds \end{aligned}$$

Sendo o integral de superfície definido à custa de um integral de Riemann num conjunto bidimensional $T \subset \mathbb{R}^2$, é frequente o uso da seguinte notação:

$$\iint_S \phi \, dS \;=\; \iint_T \phi\big(g(t,s)\big) \left\| \frac{\partial g}{\partial t} \times \frac{\partial g}{\partial s} \right\| dt\, ds.$$

Isto, por si só, não garante que o integral de superfície esteja bem definido. Para o mesmo existir, no sentido do integral de Riemann, é suficiente que a função integranda seja contínua até à fonteira de T. Para tal, vamos admitir que g e ϕ são regulares até à fronteira de T.

Definição: Seja $g : T \to S$ uma parametrização da superfície S. Diz-se que g é de classe C^1 em $\overline{T}$, $g \in C^1(\overline{T})$, se existe um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{T} \subset U$ e g admite uma extensão de classe C^1 a U. [3]

Se g é de classe C^1 em $\overline{T}$ e ϕ é contínua em $\overline{T}$ então o integral

$$\int_T \phi\big(g(t,s)\big) \sqrt{\det Dg(t,s)^T Dg(t,s)}\, dt\, ds$$

existe — como integral de Riemann — pois a função integranda $\phi\big(g(t,s)\big)\sqrt{\det Dg(t,s)^T Dg(t,s)}$ é contínua em $\overline{T}$.

No entanto, para a definição de integral de superfície ser correcta é ainda necessário que o valor do integral não dependa da parametrização usada. Vejamos que isso não constitui problema.

Teorema [Independência do Integral de Superfície da Parametrização] Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma (única) superfície parametrizada por duas funções injectivas de classe C^1

$$g : T \to S \qquad \text{e} \qquad h : U \to S$$

Então:

$$\int_T \phi\big(g(t,s)\big) \sqrt{\det Dg(t,s)^T Dg(t,s)}\, dt\, ds = \int_U \phi\big(h(u,v)\big) \sqrt{\det Dg(u,v)^T Dg(t,s)}\, du\, dv.$$

Demonstração. Tendo em conta que g e h são injectivas e de classe C^1, existe

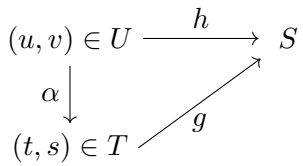
$$\alpha = g^{-1} \circ h.$$

A função $\alpha : U \to T$, que se diz uma *reparametrização* de S, é injectiva, de classe C^1 e verifica

$$h(u,v) = g\big(\alpha(u,v)\big) = g(t,s) \qquad \forall (u,v) \in U.$$

[3] Não se exige que esta extensão seja, ela própria, uma parametrização de uma superfície (que iria conter S). Isso não é de todo necessário, pois apenas pretendemos assegurar a integrabilidade $\phi\big(g(t,s)\big) \left\| \frac{\partial g}{\partial t} \times \frac{\partial g}{\partial s} \right\|$ em T. Em particular, a extensão de g a U pode não ser injectiva; para construir um exemplo simples onde tal acontece, considere a superfície cilíndrica dada por

$$g(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z), \qquad \text{com} \quad \theta \in \,]0, 2\pi[\,,\ z \in \,]0, 1[\,.$$



Ora

$$Dh(u,v)^T Dh(u,v) = D\alpha(u,v)^T Dg(t,s)^T Dg(t,s) D\alpha(u,v),$$

pelo que

$$\begin{aligned} \det Dh(u,v)^T Dh(u,v) &= \det D\alpha(u,v)^T \ \det\Big(Dg(t,s)^T Dg(t,s)\Big) \ \det D\alpha(u,v) \\ &= \Big(\det D\alpha(u,v)\Big)^2 \ \underbrace{\det Dg(t,s)^T Dg(t,s)}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

Tomando a raiz quadrada:

$$\Big(\det Dg(t,s)^T Dg(t,s)\Big)^{1/2} \big|\det D\alpha(u,v)\big| = \Big(\det Dh(u,v)^T Dh(u,v)\Big)^{1/2}.$$

Fazendo a mudança de variável $(t,s) = \alpha(u,v)$ no integral de superfície em termos da parametrização $g : T \to S$ (e recorrendo à fórmula anterior) obtém-se o integral em termos da parametrização $h : U \to S$:

$$\begin{aligned} \int_S \phi \, dS &= \int_T \phi\big(g(t,s)\big)\Big(\det Dg(t,s)^T Dg(t,s)\Big)^{1/2} dtds \\ &= \int_U \phi\big(g(\alpha(u,v))\big)\Big(\det Dg(\alpha(u,v))^T Dg(\alpha(u,v))\Big)^{1/2} \big|\det D\alpha(u,v)\big| \, dudv \\ &= \int_U \phi\big(h(u,v)\big)\Big(\det Dh(u,v)^T Dh(u,v)\Big)^{1/2} dudv \end{aligned}$$

□

1.2.3 Aplicações e Exemplos

Eis agumas aplicações do integral de superfície

(1) **Área:**

$$Vol_2(S) = \int_S dS.$$

(2) **Massa:** Sendo $\sigma : S \to \mathbb{R}$ a densidade em cada ponto de S

$$M = \int_S \sigma \, dS.$$

(3) **Centro de Massa:** As coordenadas do centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ são dadas por:

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_S x\sigma \, dS\,, \qquad \bar{y} = \frac{1}{M}\int_S y\sigma \, dS\,, \qquad \bar{z} = \frac{1}{M}\int_S z\sigma \, dS\,.$$

(4) **Momento de Inércia** (relativo a um eixo L):

$$I_L(S) = \int_S \sigma d_L^2 \, dS$$

onde $d_L : S \to \mathbb{R}$ é a distância de $x \in S$ a L.

Exemplos

(1) Considere-se:

$$S^2 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\Big\}$$

onde $R > 0$. Trata-se da esfera centrada na origem com raio R. Pode-se obter uma parametrização de S^2 utilizando coordenadas esféricas:

$$g : T \to S^2, \quad \text{com} \quad T \;=\; \Big\{(\theta,\varphi) \in \,]0, 2\pi[\,\times\,]0, \pi[\,\Big\} \quad \text{e}$$

$$g(\theta,\varphi) \;=\; \big(R\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta, R\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta, R\cos\varphi\big)$$

A matriz jacobiana da parametrização é

$$Dg(\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} -R\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta & R\cos\varphi\cos\theta \\ R\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & -R\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{bmatrix}$$

Tendo em conta que o determinante das duas primeiras linhas é

$$-R^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\,\mathrm{sen}^2\,\theta - R^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\cos^2\theta = -\frac{R^2}{2}\,\mathrm{sen}\,2\varphi \neq 0 \qquad \text{para } \varphi \neq \frac{\pi}{2};$$

e que, tomando agora $\varphi = \frac{\pi}{2}$, pelo menos um dos determinantes

$$\det\begin{bmatrix} -R\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ 0 & -R \end{bmatrix} \;=\; R^2\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \text{(da 1ª e 3ª linhas de } Dg(\theta,\pi/2))$$

$$\det\begin{bmatrix} R\cos\theta & 0 \\ 0 & -R \end{bmatrix} \;=\; -R^2\cos\theta \qquad \text{(da 2ª e 3ª linhas de } Dg(\theta,\pi/2))$$

é diferente de zero, então S é uma superfície. Note que g parametriza S excepto os pontos de S no plano $y = 0$ com $x > 0$. Esse pontos formam uma curva em S, pelo que não contribuem para o integral, pois em T o conjunto correspondente (contido nos lados do rectângulo T) tem conteúdo nulo.

Para calcular o integral, começamos por calcular o produto externo das colunas de Dg:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial\theta} \times \frac{\partial g}{\partial\varphi} \;&=\; \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -R\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta & R\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta & -R\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{bmatrix} \\ &=\; -R^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\cos\theta\;\mathbf{e}_1 - R^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\;\mathbf{e}_2 \\ &\qquad -(R^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\,\mathrm{sen}^2\,\theta + R^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\cos^2\theta)\;\mathbf{e}_3 \\ &=\; -R^2\Big(\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\cos\theta,\; \mathrm{sen}^2\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\; \mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\Big) \end{aligned}$$

Desta forma:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial g}{\partial \theta}\times\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right\| &= R^2\Big(\operatorname{sen}^4\varphi\cos^2\theta+\operatorname{sen}^4\varphi\operatorname{sen}^2\theta+\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi\Big)^{1/2}\\ &= R^2\Big(\operatorname{sen}^4\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi\Big)^{1/2}\\ &= R^2\Big(\operatorname{sen}^2\varphi\left(\operatorname{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi\right)\Big)^{1/2}\\ &= R^2\operatorname{sen}\varphi\end{aligned}$$

A área da esfera é:

$$\begin{aligned}Vol_2(S^2) &= \iint_{S^2} dS = \iint_T R^2\operatorname{sen}\varphi\, d\theta d\varphi\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} R^2\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\right)d\theta\\ &= 2\pi R^2\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = 2\pi R^2\Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi} = 4\pi R^2.\end{aligned}$$

1.3 Alguns Operadores Diferenciais

Seja f um campo escalar, ou seja, $f:A\to\mathbb{R}$ de classe C^1, onde $A\subset\mathbb{R}^n$ é aberto. Recordamos que o *gradiente* de f é o operador ∇ que associa a cada f o campo vectorial

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_2}\right),$$

onde $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Em $\mathbb{R}^3$, pode ser útil a seguinte representação simbólica do gradiente:

$$\nabla = \mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial z}, \tag{1.5}$$

onde $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ são os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Introduzimos agora alguns operadores diferenciais definidos sobre campos vectoriais.

1.3.1 Divergência

Definição: Seja $F:A\to\mathbb{R}^n$ de classe C^1, onde $A\subset\mathbb{R}^n$ é aberto (e $n\in\mathbb{N}$). A *divergência de* F é o campo escalar $\operatorname{div}F:A\to\mathbb{R}$ dado por

$$\operatorname{div}F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial F_n}{\partial x_n},$$

onde $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in A$ e $F(\mathbf{x})=\big(F_1(\mathbf{x}),F_2(\mathbf{x}),\ldots,F_n(\mathbf{x})\big)$. Em $\mathbb{R}^3$, e tendo em conta (1.5), pode-se representar este operador por

$$\operatorname{div}F = \nabla\cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(F_1,F_2,F_3).$$

Alguns casos especiais (e respectiva notação):

- $n = 1$: F é uma função real de variável real e $\operatorname{div} F = F'$.
- $n = 2$: $F(x, y) = \big(F_1(x, y), F_2(x, y)\big)$ e

$$\operatorname{div} F \;=\; \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

- $n = 3$: $F(x, y, z) = \big(F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)\big)$ e

$$\operatorname{div} F \;=\; \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{dz}.$$

Note que em todos os casos (para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$)

$$\operatorname{div} F(\mathbf{x}) \;=\; \operatorname{tr}\, DF(\mathbf{x}),$$

ou seja, a divergência de F é o traço da matriz jacobiana de F.

Embora o cálculo integral sobre campos vectoriais possa ser estudado em $\mathbb{R}^n$, iremos sobretudo estudar o caso $n = 3$.

Exemplos importantes:

(1) Calcule a divergência de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$\operatorname{div} \mathbf{x} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial x_n}{dx_n} = n.$$

No caso $\mathbf{x} = \mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos então:

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{dz} = 3.$$

(2) Mostre que a divergência de uF, onde u é um campo escalar de classe C^1 definido num aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ e $F = (F_1, F_2, F_3)$ um campo vectorial de classe C^1 também definido em A é

$$\operatorname{div}(uF) = u \operatorname{div} F + \nabla u \cdot F. \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(uF) &= \frac{\partial(uF_1)}{\partial x} + \frac{\partial(uF_2)}{\partial y} + \frac{\partial(uF_3)}{dz} \\
&= u\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}F_1 + u\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}F_2 + u\frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z}F_3 \\
&= u\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) \cdot (F_1, F_2, F_3) \\
&= u \operatorname{div} F + \nabla u \cdot F
\end{aligned}$$

Note que pode facilmente refazer o cálculo anterior para campos em $\mathbb{R}^n$, pelo que a fórmula (1.6) é válida para campos em $\mathbb{R}^n$.

1.3.2 Rotacional

Definição: Seja $F : A \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1, onde $A \subset \mathbb{R}^3$ é aberto. O *rotacional de* F é o campo vectorial $\operatorname{rot} F : A \to \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \left(D_2F_3 - D_3F_2, D_3F_1 - D_1F_3, D_1F_2 - D_2F_1 \right) \end{aligned}$$

Campo irrotacional

Se F é um campo fechado então $\operatorname{rot} F = 0$. Neste caso diz-se que F é um campo irrotacional.

Podemos recordar mais facilmente a fórmula que define o rotacional recorrendo ao seguinte produto externo (e determinante) formais:

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Nos seguintes exemplos, F e G são campos vectoriais definidos num aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ e u um campo escalar também definido em A. Admite-se também que estas funções são (pelo menos) de classe C^1.

(1) Mostre que

$$\operatorname{rot}(uF) = u \operatorname{rot} F + (\nabla u) \times F = u \operatorname{rot} a - F \times (\nabla u).$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(uF) &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ uF_1 & uF_2 & uF_3 \end{vmatrix} \\ &= u \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} + \left(F_3 \tfrac{\partial u}{\partial y} - F_2 \tfrac{\partial u}{\partial z}, F_1 \tfrac{\partial u}{\partial z} - F_3 \tfrac{\partial u}{\partial x}, F_2 \tfrac{\partial u}{\partial x} - F_1 \tfrac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= u \operatorname{rot} F + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= u \operatorname{rot} F + (\nabla u) \times F = u \operatorname{rot} F - F \times (\nabla u) \end{aligned}$$

(2) Mostre que

$$\operatorname{div}(F \times G) \;=\; G \cdot \operatorname{rot} F - F \cdot \operatorname{rot} G,$$

ou seja,

$$\nabla \cdot (F \times G) \;=\; (\nabla \times F) \cdot G - (\nabla \times G) \cdot F.$$

(exercício).

(3) Admitindo adicionalmente que u é de classe C^1, define-se o operador laplaciano por:

$$\Delta u \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \operatorname{div}(\nabla u) \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Uma outra notação para o laplaciano obtém-se escrevendo:

$$\nabla^2 u \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \nabla \cdot (\nabla u) \;=\; \operatorname{div}(\nabla u).$$

(4) Se u e F são de classe C^2, então (exercício):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} F) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\nabla u) &= 0. \end{aligned}$$

1.4 Teorema da Divergência

1.4.1 Fluxo de um Campo Vectorial

O *fluxo de um campo vectorial* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ através de uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é o integral de superfície

$$\int_S F \cdot \nu \, dS \;=\; \int_T F\big(g(t,s)\big) \cdot \nu\big(g(t)\big) \left\| \frac{\partial g}{dt} \times \frac{\partial g}{ds} \right\| dtds.$$

Para cada (x, y, z) na superfície S, o vector $\nu = \nu(x, y, z)$ representa uma normal unitária (ou seja, $\|\nu\| = 1$) na direcção em que se pretende medir o fluxo. O fluxo está bem definido sempre que F e ν são contínuas em S.

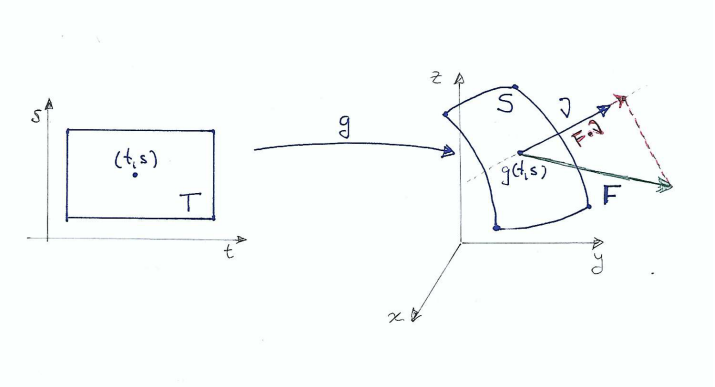


Figura 1.10: O fluxo do campo vectorial F ao longo de S é o integral de superfície da componente normal de F, $F \cdot \nu$, onde ν é um vector normal à superfície S.

Note que $\frac{\partial g}{dt}(t,s)$ e $\frac{\partial g}{ds}(t,s)$ são dois vectores tangentes a S em $g(t,s)$ — que, de facto, geram o plano tangente a S em $g(t,s)$. Sendo assim, um vector normal unitário a S em $g(t,s)$ é dado por

$$\nu\big(g(t,s)\big) \;=\; \frac{\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\times\frac{\partial g}{\partial s}(t,s)}{\left\|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\times\frac{\partial g}{\partial s}(t,s)\right\|} \tag{1.7}$$

Se a normal dada por (1.7) for contínua e limitada, o integral de superfície é [4]

$$\int_S F\cdot\nu\,dS \;=\; \int_T F\big(g(t,s)\big)\cdot\left(\frac{\partial g}{dt}\times\frac{\partial g}{ds}\right)dtds$$

Os casos em que (1.7) não é contínua correspondem a *superfícies não orientáveis*, para os quais o conceito de fluxo nunca poderá estar bem definido. Voltaremos este assunto — bem como a determinação do sentido da normal dada por (1.7) — na secção seguinte, sobre o teorema de Stokes.

Para uma analogia física ao conceito matemático de fluxo, podemos pensar em F como sendo a velocidade de um fluido. Então $\|F\|$ representa o número de particulas que atravessam um elemento de superfície (planar) perpendicular a F, por unidade de tempo e de área (do elemento de superfície).

Se F não for perpendicular à superfície plana, então a componente normal de F é ortogonal à superfície pelo que, neste caso mais geral, $F\cdot\nu$ é o número de particulas que atravessa a superfície plana S, por unidade de tempo e de área. O sinal de $F\cdot\nu$ dependerá do sentido de F e de ν: positivo se o sentido do fluxo coincide com ν e negativo caso contário.

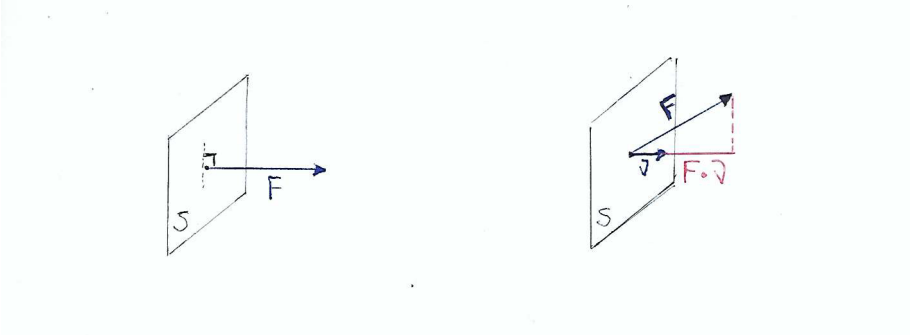


Figura 1.11: Fluxo através de uma superfície, no caso em que F é constante e S é plana. À esquerda no caso em que F é ortogonal e à S e à direita o caso geral. Como é evidente, a componente tangente a S de F origina fluxo nulo através de S.

No caso de F ser constante e S uma superfície plana, o fluxo através de S é, pois, dado por

$$\Phi(x,y,z) = F\cdot\nu\,\mathrm{Vol}_2(S)$$

Como o integral de superfície foi definido por aproximação da superfície S por paralelogramos (que são superfícies planas) então o fluxo através de uma superfície S é

$$\Phi(x,y,z) = \int_S F\cdot\nu\,dS$$

[4] A menos de um sinal de negativo, consoante o sentido de ν que se obtém em (1.7). Para ν for contínua em S, é sempre possível escolher uma parametrização para a qual o sinal negativo não seja necessário.

1.4.2 Teorema da Divergência (ou de Gauss)

Diz-se que $D \subset \mathbb{R}^3$ é um *domínio regular* se D é aberto e limitado e a sua fronteira, ∂D, é uma superfície. Se ∂D for uma união finita de superfícies com fecho compacto,

$$\partial D = S_1 \cup S_2 \cdots \cup \cdots S_m,$$

então D diz-se um domínio quase-regular.

Para definir a fronteira de um domínio quase-regular, cada uma das sub-superfícies de ∂D, $S_1, \ldots, S_m$, é dada por uma parametrização

$$g_i : \overline{T_i} \to \mathbb{R}^3, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

de classe C^1 em $\overline{T_i}$, onde os T_i são abertos e os contradomínios das funções g_i intersectam-se quanto muito em $g_i(\partial T_i)$. Pensemos nisto como uma "pavimentação" de ∂D, onde se usam como "ladrilhos" as superfícies $g_i(T_i)$, coladas umas às outras pelos respectivos bordos, $g_i(\partial T_i)$. Como na definição do integral de superfície, admite-se ainda que cada uma das g_i admite uma extensão de classe C^1 a um domínio aberto $A \supset T_i$. Isto evita problemas com a noção de diferenciabilidade na fronteira de T_i; em particular, garante-nos que

- $D_1 g \times D_2 g$ existe e é contínua até à fronteira de T_i;
- $\|D_1 g \times D_2 g\|$ tem um mínimo positivo em T_i [5].

Isto é importante porque garante que a fórmula (1.7) define uma normal unitária contínua (e limitada) em cada T_i.

Exemplos:

(1) Considere a bola

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\right\}.$$

Então a fronteira de D é a esfera

$$\partial D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

que, como já sabemos, é uma superfície. A bola, D, é um domínio regular.

(2) Para um exemplo de um domínio quase-regular, considere o cone

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 1\right\}$$

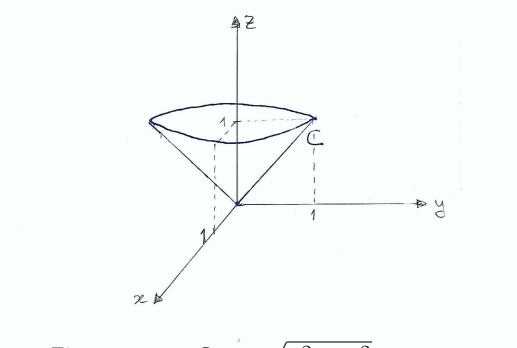


Figura 1.12: Cone $\sqrt{x^2 + y^2} < z < 1$.

[5] Se $g = g(u, v)$ então $D_1 g = \frac{\partial g}{\partial u}$ e $D_2 g = \frac{\partial g}{\partial v}$.

A fronteira de C é

$$\partial C \;=\; \left\{(x,y,z) : z = \sqrt{x^2+y^2} \wedge z \leq 1\right\} \cup \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1 \wedge z = 1)\right\}$$

Como vimos na subsecção 1.1.4, parametrizamos a folha do cone por $g_1 : T_1 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g_1(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho^2) \qquad \text{com} \quad (\rho,\theta) \in T_1 = [0,1]\times[0,2\pi].$$

Quanto ao topo do cone, podemos usar $g_2 : T_2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$g_2(x,y) = (x,y,1) \qquad \text{com} \quad (x,y) \in T_2 = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}.$$

A fronteira de C, que é

$$\partial C \;=\; g_1(T_1) \cup g_2(T_2)$$

é regular excepto no vértice do cone, $V = (0,0,0)$, e na aresta $A = \{(x,y,1) : x^2+y^2 = 1\}$. Note tanto o vértice como a aresta do cone estão contidos em $g_1(\partial T_1) \cup g_2(\partial T_2)$.

A *normal unitária exterior* em $\mathbf{x} = (x,y,z) \in \partial D$, denotada por $\nu(\mathbf{x})$, é o <u>único</u> vector normal em $\mathbf{x} \in \partial D$ que verifica

$$\begin{cases} \mathbf{x} + t\nu \in \mathbb{R}^3 \setminus D & \text{se } \; t \in \,]0,\epsilon[\\ \mathbf{x} + t\nu \in D & \text{se } \; t \in \,]-\epsilon,0[\end{cases}$$

É fácil determinar a normal unitária exterior se ∂D for descrita por uma equação do tipo da do exemplo anterior. Mas concretamente, se numa vizinhança de $\mathbf{x} \in \partial D$, ou seja, em $\partial D \cap B$, onde B é uma bola contendo $\mathbf{x}$, se tem

(a) ∂D é uma superfície descrita por $H(\mathbf{x}) = 0$ (note que $\nabla H(\mathbf{x}) \neq 0 \;\; \forall \mathbf{x} \in \partial D$),

(b) $D \cap B = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : H(\mathbf{x}) < 0\right\}$,

(c) $D^C \cap B = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : H(\mathbf{x}) > 0\right\}$,

então $n(\mathbf{x}) = \nabla H(x)$ é uma normal exterior a D em $\mathbf{x}$, pelo que

$$\nu(\mathbf{x}) = \frac{\nabla H(\mathbf{x})}{\|\nabla H(\mathbf{x})\|}$$

é a normal unitária exterior a D em $\mathbf{x}$.

Embora o teorema da divergência possa ser enunciado em $\mathbb{R}^n$, iremos apenas estudar o caso $n = 3$.

Teorema da Divergência. Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um domínio simples. Com A aberto contendo $\bar{D}$, seja $F : A \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 e $\nu(\mathbf{x})$ a normal unitária exterior em $\mathbf{x} \in \partial D$. Então:

$$\int_D \mathrm{div}\, F \, dV \;=\; \int_{\partial D} F \cdot \nu \, dS. \tag{1.8}$$

É também frequente escrever (1.8) usando a notação:

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz \;=\; \iint_{\partial D} F \cdot \nu \, dS.$$

Um domínio simples, $D \subset \mathbb{R}^3$ (também designado de sólido simples), é uma união finita de domínios elementares:

$$D = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m.$$

A noção de domínio elementar compreende-se mais facilmente no contexto da prova de (1.8). Por isso, será enunciada na subsecção seguinte.

Desde já, e para motivar a demonstração do teorema da divergência, vamos prová-lo no caso em que D é um prisma rectangular cujas faces são paralelas aos planos coordenados:

$$D \;=\; \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a_1 < x < b_1,\, a_2 < y < b_2,\, a_3 < z < b_3\Big\}$$

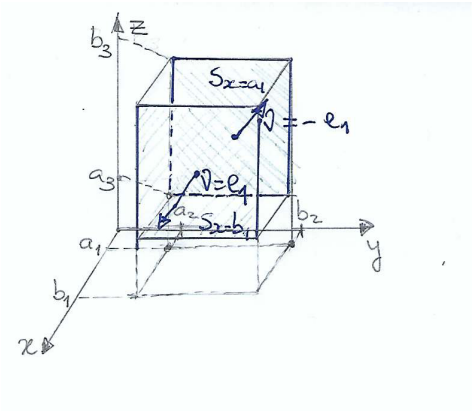


Figura 1.13: Prisma rectangular usado para ilustrar a prova do teorema da divergência.

Comecemos por calcular o fluxo do campo $(F_1, 0, 0)$ através das duas faces de D contidas nos planos

$$\begin{aligned} x &= a_1 \qquad \text{(cuja normal exterior é } \nu = -e_1) \\ x &= b_1 \qquad \text{(cuja normal exterior é } \nu = e_1) \end{aligned}$$

Pelo teorema de Fubini e pelo teorema fundamental do cálculo dos integrais simples:

$$\begin{aligned} \Phi_1 \;&=\; \iiint_D \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dV \;=\; \int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dx \right) dy \right) dz \\ &=\; \int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{a_2}^{b_2} \Big(F_1(b_1,y,z) - F_1(a_1,y,z) \Big) dy \right) dz \\ &=\; \iint_{S_{x=b_1}} (F_1,0,0)\cdot \nu \, dS \;+\; \iint_{S_{x=a_1}} (F_1,0,0)\cdot \nu \, dS. \end{aligned}$$

Nas outras faces de D, $(F_1, 0, 0) \cdot \nu = 0$, pelo que

$$\iiint_D \operatorname{div}(F_1, 0, 0)\, dV = \iint_{\partial D} (F_1, 0, 0) \cdot \nu \, dS \tag{1.9}$$

Identicamente (aliás, basta tocar o nome das variáveis para obter estes resultados a partir do anterior):

$$\iiint_D \operatorname{div}(0, F_2, 0)\, dV = \iint_{\partial D} (0, F_2, 0) \cdot \nu \, dS, \tag{1.10}$$

$$\iiint_D \operatorname{div}(0, 0, F_3)\, dV = \iint_{\partial D} (0, 0, F_3) \cdot \nu \, dS. \tag{1.11}$$

Somando ambos os membros das equações (1.9), (1.10) e (1.11) obtém-se:

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dV = \iint_{\partial D} F \cdot \nu \, dS.$$

□

Interpretação física de $\operatorname{div} F$

Aproveitemos desde já o caso especial do teorema da divergência, acima provado, para entendermos o significado físico do operador div.

Assumimos que F é de classe C^1 num domínio aberto, $A \subset \mathbb{R}^3$. Consideremos um cubo centrado num ponto arbitrário $\mathbf{x} = (x_0, y_0, z_0) \in A$, cujas arestas têm comprimento $h > 0$ tão pequeno que o cubo está contido em A; tais cubos são vizinhanças de (x_0, y_0, z_0), que designamos por $C(h)$.

Dado que F é de classe C^1, $\operatorname{div} F$ é uma função contínua, ou seja:

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\in C(h) \\ h\to 0}} \underbrace{\operatorname{div} F(x,y,x) - \operatorname{div} F(x_0,y_0,z_0)}_{\shortparallel \; E(x,y,z)} = 0$$

Dito de outra forma, $\operatorname{div} F(x, y, x) = \operatorname{div} F(x_0, y_0, z_0) + \delta(x, y, z)$ onde

$$\delta(x, y, z) \to 0 \quad \text{quando} \quad h \to 0.$$

Assim sendo:

$$\begin{aligned} \int_{C(h)} \operatorname{div} F(x, y, z)\, dV &= \int_{C(h)} \operatorname{div} F(x_0, y_0, z_0)\, dV + \int_{C(h)} \delta(x, y, z)\, dV \\ &= \int_{C(h)} \operatorname{div} F(x_0, y_0, z_0)\, dV + o(h^3). \end{aligned}$$

Recordamos que $o(h^n)$ representa uma função $g(h)$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h^n} = 0.$$

Então, pelo teorema da divergência aplicado aos cubos $C(h)$:

$$\begin{aligned}\int_{\partial C(h)} F\cdot\nu\, dS &= \int_{C(h)} \operatorname{div}\, F(x,y,z)\, dV \\ &= \int_{C(h)} \operatorname{div} F(x_0,y_0,z_0)\, dV \;+\; o(h^3) \\ &= \operatorname{div} F(x_0,y_0,z_0)\int_{C(h)} dV \;+\; o(h^3) \;=\; \operatorname{div} F(x_0,y_0,z_0)\, h^3 \;+\; o(h^3).\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\operatorname{div} F(x_0,y_0,z_0) \;=\; \frac{1}{h^3}\int_{\partial C(h)} F\cdot\nu\, dS + E(h)$$

onde $\lim_{h\to 0} E(h) = 0$. Como

$$\frac{1}{h^3}\int_{\partial C(h)} F\cdot\nu\, dS$$

é o fluxo de F através da fronteira do cubo $C(h)$ por unidade de volume, então $\operatorname{div} F(x_0,y_0,z_0)$ mede a fonte ou sumidouro de F (por unidade de volume) num, digamos que, "cubo infinitesimal" centrado em (x_0,y_0,z_0). Dito com mais rigor:

$$\operatorname{div} F(x_0,y_0,z_0) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\int_{\partial C(h)} F\cdot\nu\, dS.$$

Fluido Incompressível

Se $F : D \to \mathbb{R}^3$ representar a velocidade em cada ponto de um fluido, admitamos que $\operatorname{div} F(x) = 0$ para todo o $\mathbf{x} \in D$. Como vimos, neste caso não há nem acumulação nem depleção de fluido em cada "cubo infinitesimal", pelo que o fluido se diz *incompressível*. Veremos mais adiante que esta conclusão vale para qualquer subconjunto de D a que seja aplicável o teorema da divergência.

1.4.3 Demonstração do Teorema da Divergência

Vamos provar o teorema da divergência, mas apenas para domínios simples. Pensemos num sólido D obtido à custa de uma união finita de sólidos elementares — com forma cilíndrica — nos quais se pode provar o teorema da divergência de forma análoga ao que foi aqui feito para prismas rectangulares.

Partição de D em $D_1 \cup D_2$

Designa-se $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^3$ uma partição de um aberto $D \subset \mathbb{R}^3$ se

- D_1 e D_2 são abertos;
- $D = D_1 \cup D_2 \quad$ e $\quad D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

Dada uma tal partição, seja $S = \partial D_1 \cap \partial D_2$, $S_1 = \partial D_1 \setminus S$ e $S_2 = \partial D_2 \setminus S$. Designamos a normal exterior a D_1 por ν_1 e a normal exterior a D_2 por ν_2. Note que em S (que está contida tanto em ∂D_1 como em ∂D_2) $\nu_2 = -\nu_1$.

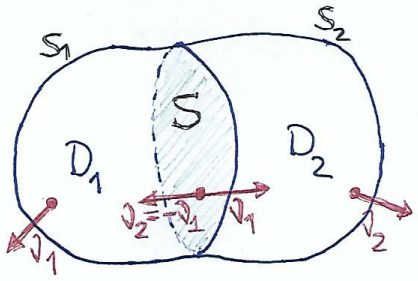


Figura 1.14: Partição de $D \subset \mathbb{R}^3$ em $D_1 \cup D_2$. Note que $\partial D_1 = S_1 \cup S$ e $\partial D_2 = S_2 \cup S$.

Vamos admitir que D_1 e D_2 são conjuntos elementares, nos quais conseguimos provar o teorema da divergência, e vejamos como podemos, facilmente, deduzir a validade do resultado para D:

$$\begin{aligned}
\int_D \operatorname{div} F \, dV &= \int_{D_1} \operatorname{div} F \, dV + \int_{D_2} \operatorname{div} F \, dV \\
&= \int_{S_1} F \cdot \nu_1 \, dS + \int_S F \cdot \nu_1 \, dS + \int_{S_2} F \cdot \nu_2 \, dS + \underbrace{\int_S F \cdot (-\nu_1) \, dS}_{-\int_S F \cdot \nu_1 \, dS} \\
&= \int_{\partial D} F \cdot \nu \, dS
\end{aligned}$$

A ideia intuitiva que está na base deste resultado é que o fluxo de F que sai de [ou entra em] D_1 por S (a parte comum da fronteira de D_1 e D_2) é igual ao fluxo de F que entra em [ou sai de] D_2 por S.

Por indução a partir do resultado anterior, obtém-se a mesma conclusão para a decomposição de D em um número finito de conjuntos abertos e disjuntos:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_p, \qquad \text{com } p \in \mathbb{N},$$

$$D_i \cap D_j = \emptyset \qquad \text{para } i \neq j.$$

Prova para um sólido elementar cilíndrico

Dado um domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^2$, consideremos

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in P \text{ e } f_1(x, y) < z < f_2(x, y) \right\}$$

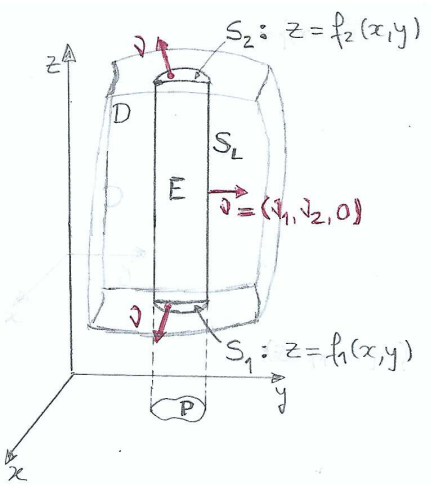


Figura 1.15: Sólido elementar cilíndrico E.

Podemos pensar em E como o sólido cilíndrico compreendido entre as superfícies

$$S_1 = \big\{(x,y,z) : (x,y) \in P \text{ e } z = f_1(x,y)\big\} \quad \text{e} \quad S_2 = \big\{(x,y,z) : (x,y) \in P \text{ e } z = f_2(x,y)\big\},$$

onde P a projecção de E no plano coordenado $z = 0$. Resulta assim que E é a intersecção de D com a translação de P segundo a direcção do eixo dos z. O "topo", S_1, e a "base", S_2, de E são, simplesmente, os gráficos das funções $f_1 : P \to \mathbb{R}$ e $f_2 : P \to \mathbb{R}$.

Recuperamos agora a ideia da prova do teorema para prismas rectangulares, descrita na subsecção anterior. Usando o teorema fundamental do cálculo:

$$\begin{aligned}\int_E \operatorname{div}(0,0,F_3)\, dV &= \int_P \Big(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \Big) dA \\ &= \int_P \Big(F_3\big(x,y,f_2(x,y)\big) - F_3\big(x,y,f_1(x,y)\big) \Big) dA.\end{aligned}$$

Calculemos agora o fluxo de $(0,0,F_3)$ através de ∂E.

O "topo" do cilíndro E — a superfície S_2 — pode ser dado pela equação

$$G(x,y,z) = z - f_2(x,y) = 0.$$

Assim, um vector normal a cada ponto de S_2 é

$$\nabla G = \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right).$$

Note que ∇G tem o sentido correcto, logo é uma normal exterior a E, e

$$\|\nabla G\| = \left(\Big(\frac{\partial f_2}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f_2}{\partial y}\Big)^2 + 1 \right)^{1/2}, \qquad \nu = \left(\cdots, \cdots, \frac{1}{\|\nabla G\|} \right).$$

Como vimos, uma parametrização de S_2 é $g(x,y) = \big(x,y,f_2(x,y)\big)$, para $(x,y) \in P$. Ora

$$Dg = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad Dg^T Dg = \begin{bmatrix} 1 + \big(\frac{\partial f_2}{\partial x}\big)^2 & \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} & 1 + \big(\frac{\partial f_2}{\partial y}\big)^2 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\Big(\det\big(Dg^T Dg\big)\Big)^{1/2} \;=\; \left(\Big(\frac{\partial f_2}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial f_2}{\partial y}\Big)^2+1\right)^{1/2} \;=\; \|\nabla G\|.$$

Calculando então o integral de superfície em S_2:

$$\int_{S_2}(0,0,F_3)\cdot\nu\,dS \;=\; \int_P F_3(x,y,f_2(x,y))\;\underbrace{\frac{1}{\|\nabla G\|}}_{\text{comp. }z\text{ de }\nu}\;\underbrace{\|\nabla G\|}_{=(\det Dg^T Dg)^{\frac{1}{2}}}\;dA$$

$$= \int_P F_3\big(x,y,f_2(x,y)\big)\,dA$$

O fluxo através da "base" do cilíndro, S_1, é calculado de forma análoga. Aqui S_1 é dada por

$$G(x,y,z)=z-f_1(x,y)=0,$$

e um vector normal em cada ponto de S é

$$\nabla G=\left(-\frac{\partial f_1}{\partial x},-\frac{\partial f_1}{\partial y},1\right).$$

Porém, tratando-se de uma normal interior a E (note que a componente z é positiva), no caso de S_1 obtém-se que:

$$\nu=-\frac{\nabla G}{\|\nabla G\|}=\left(\cdots,\cdots,-\frac{1}{\|\nabla G\|}\right).$$

O restante cálculo é similar, resultando que

$$\int_{S_1}(0,0,F_3)\cdot\nu\,dS \;=\; -\int_P F_3\big(x,y,f_1(x,y)\big)\,dA$$

Resta calcular o fluxo através da parede lateral do cilindro, S_L. Mas como a normal exterior a S_L é paralela ao plano $z=0$, a sua componente z é nula, pelo que

$$(0,0,F_3)\cdot\nu=0.$$

Desta forma

$$\int_{S_L}(0,0,F_3)\cdot\nu\,dS \;=\; 0.$$

Podemos então concluir que

$$\begin{aligned}\int_E \operatorname{div}(0,0,F_3)\,dV &= \int_P\Big(F_3\big(x,y,f_2(x,y)\big)-F_3\big(x,y,f_1(x,y)\big)\Big)dA\\ &= \int_{\partial E}(0,0,F_3)\cdot\nu\,dS\end{aligned} \tag{1.12}$$

Repetindo este raciocínio para um sólidos elementares cilíndricos E gerados pela translação:

(b) da sua projecção no plano $y=0$ (translação na direcção do eixo dos y)

$$\int_E \operatorname{div}(0,F_2,0)\,dV \;=\; \int_{\partial E}(0,F_2,0)\cdot\nu\,dS; \tag{1.13}$$

(c) da sua projecção no plano $x = 0$ (translação na direcção do eixo dos x)

$$\int_E \operatorname{div}(F_1, 0, 0)\, dV \;=\; \int_{\partial E} (F_1, 0, 0) \cdot \nu \, dS. \tag{1.14}$$

Somando ambos os membros das equações (1.14), (1.13) e (1.12), obtém-se:

$$\int_D \operatorname{div} F \, dV \;=\; \int_{\partial D} F \cdot \nu \, dS.$$

Definição de sólido simples. $D \subset \mathbb{R}^n$ diz-se um sólido simples se pode ser decomposto numa união finita de sólido elementares disjuntos. Diz-se que um sólido $E \subset \mathbb{R}^3$ é elementar se for simultaneamente dos três tipos seguintes.

(1) Gerado por translação de P (contido no plano $z = 0$) na direcção do eixo dos z:

$$\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in P \text{ e } f_1(x, y) < z < f_2(x, y)\Big\}$$

onde $P \subset \mathbb{R}^2$ é aberto é $f_1, f_2 : P \to \mathbb{R}$ são de classe C^1.

(2) Gerado por translação de P (contido no plano $y = 0$) na direcção do eixo dos y:

$$\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in P \text{ e } g_1(x, z) < y < g_2(x, z)\Big\}$$

onde $P \subset \mathbb{R}^2$ é aberto é $g_1, g_2 : P \to \mathbb{R}$ são de classe C^1.

(3) Gerado por translação de P (contido no plano $x = 0$) na direcção do eixo dos x:

$$\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in P \text{ e } h_1(y, z) < x < h_2(y, z)\Big\}$$

onde $P \subset \mathbb{R}^2$ é aberto é $h_1, h_2 : P \to \mathbb{R}$ são de classe C^1.

O teorema da divergência foi provado para sólidos simples. □

1.4.4 Exemplos

O teorema da divergência é frequentemente usado para calcular o fluxo de um campo vectorial F através da fronteira de um sólido, especialmente nos casos em que é mais vantajoso — do ponto de vista computacional — o cálculo do integral triplo de $\operatorname{div} F$.

(1) Consideremos a bola centrada na origem de raio R:

$$B = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\Big\}.$$

Calculemos o fluxo de $F(x, y, z) = (x, y, z)$ através de ∂B. Pelo teorema da divergência:

$$\int_{\partial B} F \cdot \nu \, dV \;=\; \int_B \operatorname{div} F \, dV \;=\; \int_B 3 dV \;=\; 3\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \;=\; 4\pi R^3.$$

(2) Vamos repetir o cálculo anterior (com o mesmo F) para o elipsoide

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\right\},$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Como no exemplo 1:

$$\int_{\partial D} F \cdot \nu \, dV \;=\; \int_D \operatorname{div} F \, dV \;=\; \int_D 3dV \;=\; 3\int_D dV$$

Usando a mudança de coordenadas

$$(x,y,z) = g(u,v,w) = (au, bv, cw),$$

então

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad u^2 + v^2 + w^2 < 1,$$

ou seja, g transforma o elipsoide E na bola $B = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : \|(u,v,w)\| < 1\}$. Tendo em conta que

$$\det Dg \;=\; \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \;=\; abc$$

então:

$$\int_{\partial D} F \cdot \nu \, dS \;=\; 3\int_D dV \;=\; 3\int_B \underbrace{|\det Dg|}_{\shortparallel\, abc} \, dV \;=\; 3abc\left(\frac{4}{3}\pi\right) \;=\; 4\pi abc.$$

(3) $F : D \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 definido tal que $\operatorname{div} F = 0$. Por exemplo, pode ser F constante, $F = (y^2, z, x)$, etc. Seja $A \subset D$ um sólido simples. Então, pelo teorema da divergência:

$$\int_{\partial A} F \cdot \nu \, dS = \int_A \operatorname{div} F \, dV = 0.$$

Em particular, este resultado diz-nos que se F representa a velocidade de um fluido incompressível em cada $\mathbf{x} \in D$, o fluxo total de particulas através da fronteira de *qualquer* sólido simples $A \subset D$ é nulo.

1.5 Teorema de Stokes

1.5.1 Superfícies Orientáveis

Definição. Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se *orientável* se existir um campo vectorial contínuo $\nu : S \to \mathbb{R}^3$ tal que, para todo o $\mathbf{x} \in S$, ν é uma normal unitária em $\mathbf{x}$. Neste caso diz-se que ν define uma orientação em S.

Exemplos de Superfícies Orientáveis

(1) Seja S uma superfície dada por $F(x,y,z)=0$, onde $F: A \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e A é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$. Então $\nabla F(x,y,z) \neq (0,0,0)$ em S e

$$\nu(x,y,z) \;=\; \frac{\nabla F(x,y,z)}{\|\nabla F(x,y,z)\|}$$

é uma função contínua em S. Isto porque ∇F e $\|\cdot\|$ são funções contínuas e, pela definição de superfície, $\|\nabla F\| \neq 0$. Além disso, como vimos anteriormente, $\nu(x,y,z)$ é uma normal unitária em cada ponto $(x,y,z) \in S$. Podemos pois concluir que S é orientável.

(2) Seja S uma superfície dada por $z=f(x,y)$, onde $(x,y) \in P$, e $P \subset \mathbb{R}^2$ é aberto e f é de classe C^1. Como vimos, uma parametrização de S é

$$g(x,y) \;=\; \big(x,y,f(x,y)\big) \qquad \text{para } (x,y) \in P.$$

As colunas de Dg são os dois vectores tangentes (linearmente independentes):

$$T_1 \;=\; \left(1,0,\tfrac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \text{e} \qquad T_2 \;=\; \left(0,1,\tfrac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Então, como vimos anteriormente,

$$\nu(x,y,z) \;=\; \frac{T_1 \times T_2}{\|T_1 \times T_2\|} \;=\; \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{1+\|\nabla f(x,y)\|^2}$$

é uma normal unitária em $(x,y,z) \in S$. Além disso, ν é uma função contínua em S.

(3) Seja S uma superfície dada por uma parametrização de classe C^1, $g: T \to \mathbb{R}^3$, onde $T \subset \mathbb{R}^2$. Então [6]:

$$\nu(x,y,z) \;=\; \frac{D_1 g \times D_2 g}{\|D_1 g \times D_2 g\|}$$

define uma normal unitária em cada ponto $(x,y,z) \in S$. Note que $D_1 g$ e $D_2 g$ são linearmente independentes, pelo que ν está bem definida e é contínua.

Consideremos agora os exemplos anteriores mas tomando S como sendo uma superfície compacta: definida por uma parametrização $g: T \to S$, onde T é compacto. Para uma superfície compacta estar bem definida, admite-se adicionalmente que existe uma extensão de S a uma superfície aberta, no sentido em que g tem uma extensão a uma parametrização definida num aberto $A \supset T$ (em particular, Dg deverá existir e ter característica 2 em A). Neste caso, dos cálculos dos exemplos anteriores resulta uma normal unitária, ν, bem definida e contínua até à fronteira de S.

Banda de Möbius

Um exemplo relativamente simples de uma superfície não orientável é a banda de Möbius [7]:

[6] Recordamos que sendo $g = g(t,s)$, então $D_1 g = \frac{\partial g}{\partial t}$ (ou seja, $D_1 g$ é a derivada parcial de g em relação à primeira variável, neste caso t) e $D_2 g = \frac{\partial g}{\partial s}$ (ou seja, $D_2 g$ é a derivada parcial em relação à segunda variável, neste caso s).

[7] Banda de Möbius feita com uma tira de papel e fita adesiva. By David Benbennick — Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=50359.

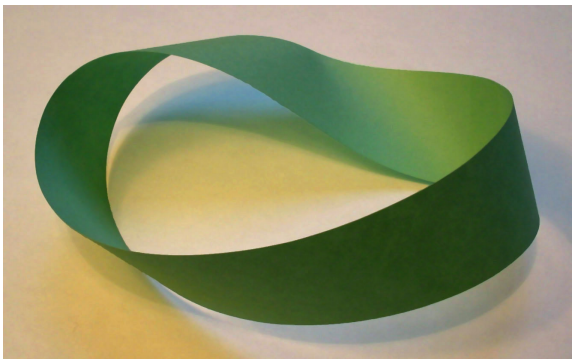


Figura 1.16: Banda de Möbius, criada a partir de uma tira de papel a que se deu meia volta e se colou as extremidades.

Topologicamente, pode-se pensar numa banda de Möbius como sendo o seguinte rectângulo, onde o lado $[AB]$ foi identificado com o lado $[\bar{A}, \bar{B}]$.

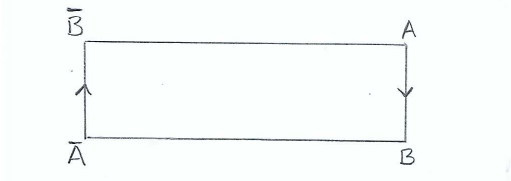


Figura 1.17: Para construir (fisicamente!) uma banda de Möbius, colar o segmento de recta $[AB]$ com $[\bar{A}\bar{B}]$, com A colado a $\bar{A}$ e B colado a $\bar{B}$. Depois da colagem, as setas devem apontar na mesma direcção.

Uma possível parametrização da banda de Möbius é:

$$g(t,s) = \big(x(t,s), y(t,s), z(t,s)\big),$$

com $0 \leq t \leq 2\pi$, $-1 \leq s \leq 1$ e

$$\begin{cases} x(t,s) = \left(1 + \frac{s}{2}\cos\frac{t}{2}\right)\cos t \\ y(t,s) = \left(1 + \frac{s}{2}\cos\frac{t}{2}\right)\operatorname{sen} t \\ z(t,s) = \frac{s}{2}\operatorname{sen}\frac{t}{2} \end{cases}$$

1.5.2 Bordo de uma Superfície

O conceito de *bordo* de uma superfície pretende capturar a ideia de uma curva que, num certo sentido, "limita" ou é "fronteira" de uma superfície.

Definição de Superfície Elementar. Consideramos uma superfície orientável $S \subset \mathbb{R}^3$ dada por uma única parametrização

$$g : \overline{T} \to S$$

onde T é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^2$ e g é injectiva em T e de classe C^1 em $\overline{T}$ [8]. Adicionalmente, admite-se que existe um caminho de Jordan seccionalmente regular $\gamma : [a,b] \to \overline{T}$

[8] Note que aqui se está a tomar uma parametrização com propriedades adicionais, pois assume-se que g está definida, é injectiva e de classe C até à fronteira, isto é, definida no conjunto fechado $\overline{T} = T \cup \partial T$. Recordamos que g é de classe C^1 em $\overline{T}$, se existe um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{T} \subset U$ e g admite uma extensão de classe C^1 a U.

tal que ∂T é a curva $\gamma([a,b])$ e $g \circ \gamma$ é também um caminho simples, fechado e seccionalmente regular (ver figura 1.18). Neste caso, diz-se que S é uma *superfície elementar*.

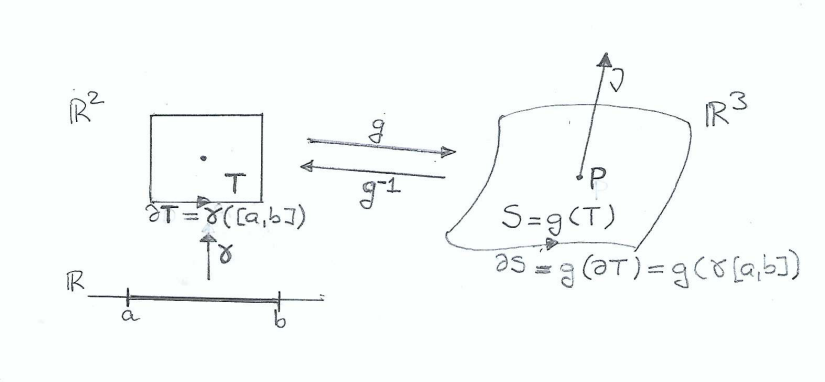


Figura 1.18: Bordo de uma superfície elementar. A definição assegura que o sentido de ∂S é compatível com a orientação de S induzida por g.

Definição de Bordo (ou Fronteira) de uma Superfície Elementar.

O *bordo* de uma superfície elementar S descrita por uma única parametrização $g : \overline{T} \to S$, com $\gamma : \partial T \to S$, é a curva descrita pelo caminho $g \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$:

$$\partial S = g(\partial T) = g \circ \gamma\big([a,b]\big).$$

Sentido do Bordo de uma Superfície Elementar Compatível com a Orientação.

Considerando a *orientação de S induzida pela parametrização*, dada por

$$\nu(x,y,z) \;=\; \frac{D_1 g \times D_2 g}{\|D_1 g \times D_2 g\|}$$

diz-se que o *sentido* do caminho $g \circ \gamma$ — que define um sentido para o bordo ∂S — é *compatível* com a orientação de S se γ descreve ∂T no sentido directo (ou positivo).

Exemplos:

(1) Considere que S é o disco

$$S \;=\; \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < R^2 \text{ e } z = c\Big\} \tag{1.15}$$

com $c \in \mathbb{R}$ e $R > 0$.

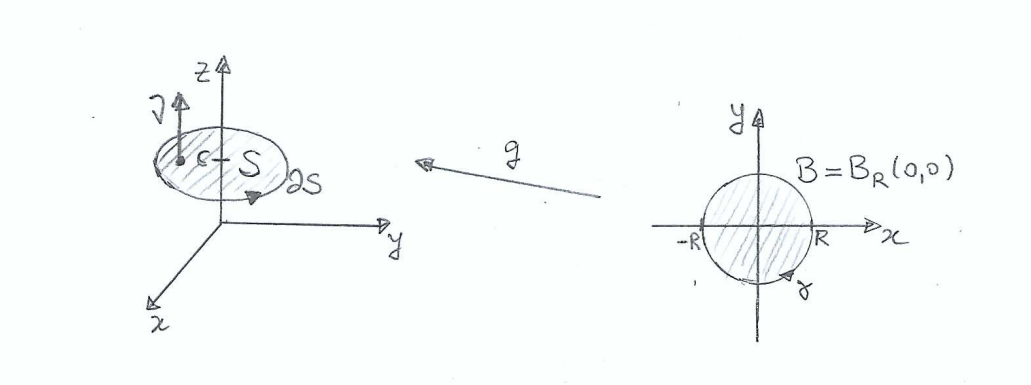


Figura 1.19: Sentido do bordo compatível com a orientação de um disco em $\mathbb{R}^3$ (exemplo 1).

Uma parametrização para S é $g : \bar{B} \to \mathbb{R}^3$, $B = B_R(0,0)$, dada por

$$g(x,y) = (x,y,c).$$

O bordo de S é

$$\partial S \;=\; g(\partial B) \;=\; \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = R^2 \text{ e } z = c\Big\}.$$

Ora

$$D_1 g(x,y) \times D_2(x,y) = (1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1)$$

já tem norma um, pelo que a orientação de S é constante e igual a

$$\nu = (0,0,1).$$

Tomando uma parametrização de ∂B no sentido directo

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t), \qquad \text{com } t \in [0,2\pi], \tag{1.16}$$

então a parametrização do bordo ∂S compatível com ν é

$$(g\circ\gamma)(t) = g\big(\gamma(t)\big) = \big(R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t, c\big).$$

(2) Seja S o mesmo disco do exemplo (1), dado por (1.15) mas, agora, parametrizado por $h : \bar{B} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$h(x,y) = (x,-y,c).$$

O bordo de S é também $\partial S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = R^2\big\}$. Porém, neste caso a normal unitária tem a mesma direcção mas o sentido oposto ao do exemplo (1):

$$\nu = D_1 g(x,y) \times D_2(x,y) = (1,0,0) \times (0,-1,0) = (0,0,-1).$$

Utilizando a mesma parametrização de ∂B, (1.16), então a parametrização do bordo ∂S compatível com ν é

$$(g\circ\gamma)(t) = g\big(\gamma(t)\big) = \big(R\cos t, -R\,\mathrm{sen}\, t, c\big) = \big(R\cos(-t), R\,\mathrm{sen}(-t), c\big).$$

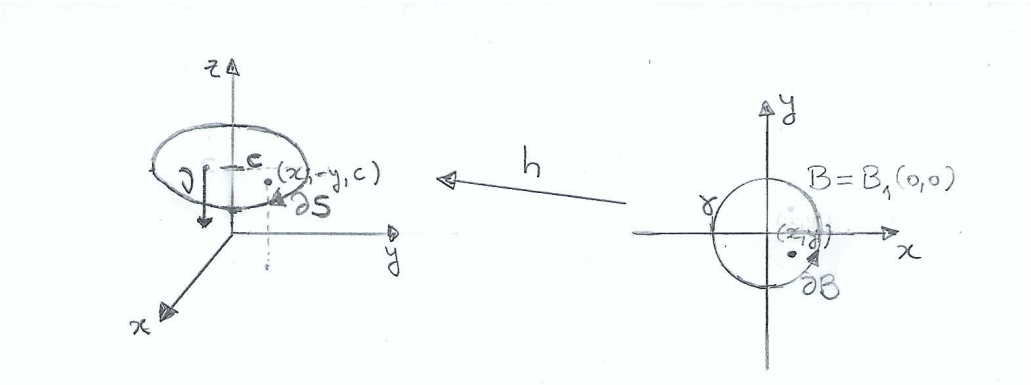


Figura 1.20: Sentido do bordo compatível com a orientação de um disco em $\mathbb{R}^3$ (exemplo 2).

Note que, neste caso, o bordo ∂S é percorrido no sentido oposto ao do exemplo (1) [9].

(3) Consideremos agora a superfície cilíndrica

$$S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ com } 0 < z < 1\Big\}$$

Consideramos também duas parametrizações $g : T_1 \to S$ e $h : T_2 \to S$, onde

$$T_1 = \Big\{(\theta, z) : 0 \le \theta \le 2\pi \text{ e } 0 \le z \le 1\Big\},$$

$$T_2 = \Big\{(\theta, z) : -\pi \le \theta \le \pi \text{ e } 0 \le z \le 1\Big\},$$

dadas por

$$g(\theta, z) = \big(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta,\, z\big)$$
$$h(\theta, z) = \big(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta,\, z\big)$$

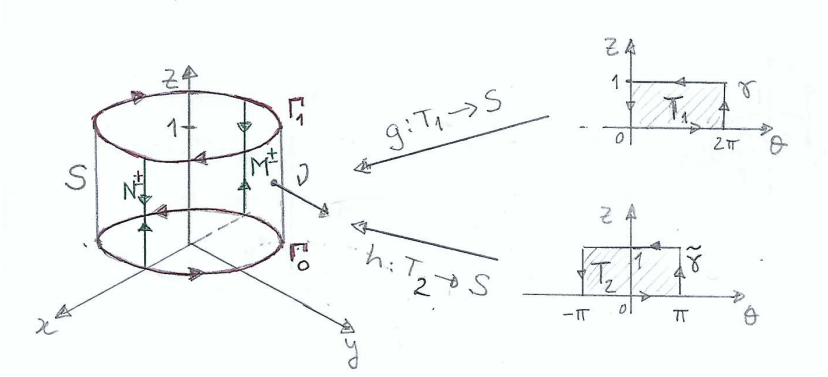


Figura 1.21: O que poderá ser o bordo de uma superfície cilíndrica, que é não elementar?

[9] $h = \rho \circ g$, onde $\rho(x,y,z) = (x,-y,z)$, ou seja, $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é a reflexão segundo o plano coordenado $y = 0$. A aplicação de ρ faz ∂S trocar de sentido (em relação ao exemplo (1)).

Temos assim que (ver figura 1.21)

$$g \circ \gamma(T_1) \ = \ \Gamma_0 \cup N^+ \cup \Gamma_1 \cup N^-$$

Identicamente,

$$h \circ \tilde{\gamma}(T_2) \ = \ \Gamma_0 \cup M^+ \cup \Gamma_1 \cup M^-$$

De facto, os caminhos M^+ e M^- correspondem ao segmento de recta M percorrido para cima ou para baixo. O mesmo se passa com N^-, N^+, que são o segmento N percorrido em sentidos contrários. Assim, esta superfície não é elementar, pois $g \circ \gamma$ (e também $g \circ \tilde{\gamma}$) não é uma curva simples!

De facto, o bordo de S não poderia ser $g \circ \gamma(T_1)$ pois os pontos de N são interiores à superfície [10]. Também $g \circ \tilde{\gamma}(T_2)$ não serve para definir ∂S pois os pontos de M são interiores a S. Voltaremos, mais tarde, à questão da definição do bordo de uma superfície não elementar, como é este cilindro. A ideia base será a de remover do bordo a parte do caminho $g \circ \gamma$ que é interior a S, ou seja, N. Note que do ponto de vista do cálculo de integrais de linha, N^+ e N^- cancelam, pois são a mesma curva percorrida em sentidos contrários.

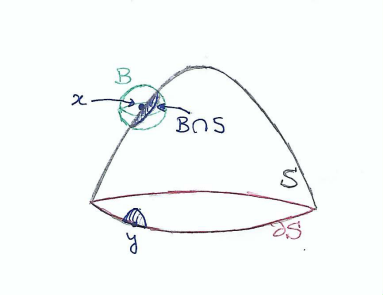


Figura 1.22: Vizinhanças de pontos de S, na topologia de S: $\mathbf{x}$ é um ponto interior e $\mathbf{y}$ um ponto fronteiro (de S). Note que $\mathbf{y} \in \partial S \ \Rightarrow \ \mathbf{y} \notin S \ \Rightarrow \ \mathbf{y} \notin B_\epsilon(\mathbf{y}) \cap S$, para qualquer $\epsilon > 0$. Apenas estes pontos fronteiros deverão pertencer ao *bordo* de S.

Regra da Mão Direita

Na prática, é muitas vezes usada a regra da mão direita para determinar o sentido do bordo compatível com a orientação induzida por uma dada parametrização.

Consideremos agora uma partição de uma superfície orientável S em pequenas superfícies quase planas, tal como é feito para definir o integral de superfície (ver figura 1.9). Do ponto de vista local, um pequeno elemento da partição de S é aproximadamente um paralelogramo. Fazendo ∂T ser percorrido no sentido directo, então ∂S é percorrido no sentido de $\frac{\partial g}{\partial t}$ (e no sentido oposto a $\frac{\partial g}{\partial s}$)

[10] Se $p \in S$, uma vizinhança de p na topologia de S (não na de $\mathbb{R}^3$) é um conjunto $B \cap S$, onde $B \subset \mathbb{R}^3$ é uma bola centrada em p. p está no interior de S pois existe uma vizinhança de p (na topologia de S) contida em S.

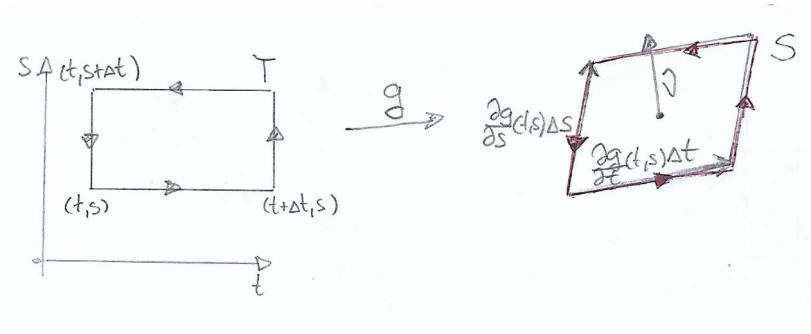


Figura 1.23: Sentido do bordo compatível com a orientação (do ponto de vista local). O sendo do bordo ∂S (indicado a vermelho) é o sentido de $\frac{\partial g}{\partial t}$ e oposto a $\frac{\partial g}{\partial s}$. Por outro lado, ν tem o sentido de $\frac{\partial g}{\partial t} \times \frac{\partial g}{\partial s}$.

Assim sendo, o sentido induzido por g é dado pela bem conhecida regra da mão direita [11]

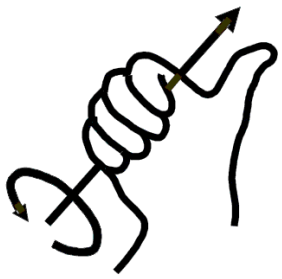


Figura 1.24: Regra da mão direita: se a orientação de ν tem o sentido do polegar, o bordo é percorrido no sentido indicado pelos (restantes) dedos.

1.5.3 Teorema de Stokes para Superfícies Elementares

O teorema de Stokes estabelece uma relação entre

- A circulação de um campo F, ou seja, o trabalho de F ao longo de um caminho fechado.
- O fluxo do rotacional de F através de uma superfície orientável cujo bordo é esse caminho (admitindo que essa orientação é compatível com o sentido do caminho).

Teorema de Stokes (para superfícies elementares). Seja $F : A \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1, onde $A \subset \mathbb{R}^3$ é aberto e S uma superfície elementar (orientável) tal que $S \cup \partial S \subset A$. Então

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS \;=\; \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

onde γ é um caminho seccionalmente regular simples que parametriza ∂S com sentido compatível com a orientação de S.

[11] Public domain, via Wikimedia Commons, Link.

Demonstração. Provamos apenas o teorema no caso em que a parametrização de S é de classe C^2. Seja pois $g : D \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(u,v) \;=\; \Big(x(u,v),\; y(u,v),\; z(u,v)\Big)$$

uma parametrização para a superfície elementar S, de classe C^2 em D, que induz a orientação

$$\nu \;=\; \big(\nu_1,\nu_2,\nu_3\big) \;=\; \frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v} \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \nu_1 = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} \\ \nu_2 = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ \nu_3 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \end{cases} \tag{1.17}$$

Admitamos que

$$\gamma(t) = \big(u(t),\, v(t)\big)$$

é um caminho que parametriza a curva ∂D percorrida no sentido directo. Então o bordo ∂S é parametrizado por:

$$g\circ\gamma\,(t) \;=\; \Big(x\big(\gamma(t)\big),\; y\big(\gamma(t)\big),\; z\big(\gamma(t)\big)\Big).$$

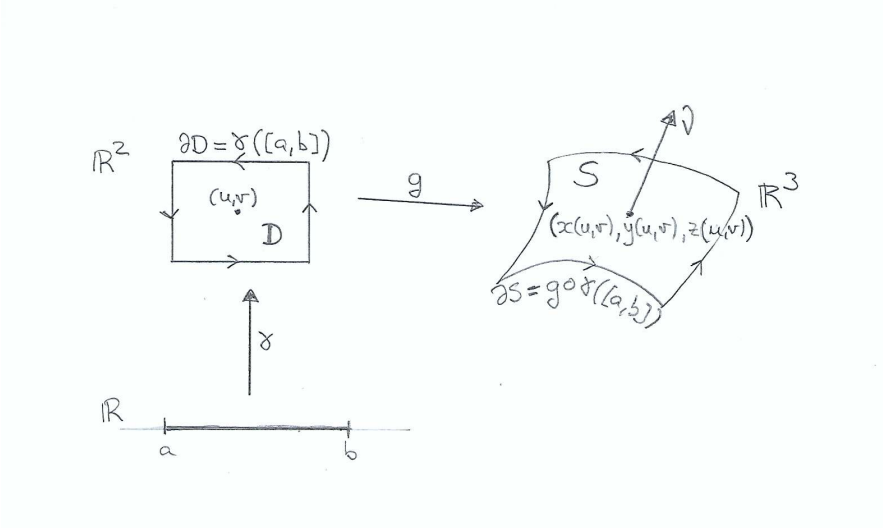


Figura 1.25: Prova do teorema de Stokes no caso em que S é elementar, descrita por uma parametrização g; ∂S tem o sentido definido por $\gamma\circ g$, compatível com a orientação de ∂S induzida por g.

Designando as componentes de F por $F = (P,Q,R)$, vamos em primeiro lugar provar o resultado para o campo $(P,0,0)$. Notando que apenas a primeira componente é não nula, o seu trabalho é

$$\int_{\partial S} P\,dx \;=\; \int_a^b \left(P\frac{\partial x}{\partial u}u'(t) + P\frac{\partial x}{\partial v}v'(t)\right)dt \;=\; \int_{\partial D} P\frac{\partial x}{\partial u}\,du + P\frac{\partial x}{\partial v}\,dv; \tag{1.18}$$

neste cálculo usou-se o termo relevante da derivada da parametrização $g \circ \gamma$, que é:

$$\frac{d}{dt}\Big(x(\gamma(t))\Big) \;=\; \frac{\partial x}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}v'(t)$$

Aplicando o teorema de Green ao integral de trabalho (1.18) ao longo do caminho γ (que parametriza ∂D):

$$\int_{\partial S} P\,dx \;=\; \iint_D \underbrace{\Big(\frac{\partial}{\partial u}(P\tfrac{\partial x}{\partial v}) - \frac{\partial}{\partial v}(P\tfrac{\partial x}{\partial u})\Big)}_{\Phi(u,v)}\,dudv.$$

Calculando a função integranda, $\Phi(u,v)$, utilizando o teorema de Schwarz e, posteriormente, os valores das componentes ν_2 e ν_3 da orientação induzida por g (equações (1.17)):

$$\begin{aligned}
\Phi(u,v) &= \frac{\partial}{\partial u}\big[P(x,y,z)\big]\frac{\partial x}{\partial v} + P\cancel{\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}} - \frac{\partial}{\partial v}\big[P(x,y,z)\big]\frac{\partial x}{\partial u} - P\cancel{\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}} \\
&= \cancel{\frac{\partial P}{dx}\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}} + \frac{\partial P}{dy}\frac{dy}{du}\frac{dx}{dv} + \frac{\partial P}{dz}\frac{dz}{du}\frac{dx}{dv} - \cancel{\frac{\partial P}{dx}\frac{dx}{dv}\frac{dx}{du}} - \frac{\partial P}{dy}\frac{dy}{dv}\frac{dx}{du} + \frac{\partial P}{dz}\frac{dz}{dv}\frac{dx}{du} \\
&= \frac{\partial P}{\partial y}\Big(\underbrace{\frac{dy}{du}\frac{dx}{dv} - \frac{dy}{dv}\frac{dx}{du}}_{-\nu_3}\Big) + \frac{\partial P}{\partial z}\Big(\underbrace{\frac{dz}{du}\frac{dx}{dv} - \frac{dz}{dv}\frac{dx}{du}}_{\nu_2}\Big) \\
&= 0\,\nu_1 + \tfrac{\partial P}{\partial z}\,\nu_2 - \tfrac{\partial P}{\partial y}\,\nu_3 \;=\; \big(0, \tfrac{\partial P}{\partial z}, -\tfrac{\partial P}{\partial y}\big)\cdot\nu \;=\; \mathrm{rot}(P,0,0)\cdot\Big(\tfrac{\partial g}{\partial u}\times\tfrac{\partial g}{\partial v}\Big)
\end{aligned}$$

Resulta assim que:

$$\int_{\partial S} P\,dx \;=\; \iint_D \mathrm{rot}(P,0,0)\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v}\right)dudv \;=\; \iint_S \mathrm{rot}(P,0,0)\cdot\nu\,dS,$$

que é o resultado pretendido.

Identicamente,

$$\int_{\partial S} Q\,dy \;=\; \iint_S \mathrm{rot}(0,Q,0)\cdot\nu\,dS \qquad \text{e} \qquad \int_{\partial S} R\,dz \;=\; \iint_S \mathrm{rot}(0,0,R)\cdot\nu\,dS.$$

Somando ambos os membros das igualdades acima, concluimos que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} F\cdot d\gamma &= \int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz \\
&= \iint_S \Big(\mathrm{rot}(P,0,0) + \mathrm{rot}(0,Q,0) + \mathrm{rot}(0,0,R)\Big)\cdot\nu\,dS \\
&= \iint_S \mathrm{rot}\,F\cdot\nu\,dS.
\end{aligned}$$

□

1.5.4 Teorema de Stokes Generalizado

Num caso mais geral vamos considerar uma superfície S que se decompõe numa união finita de superfícies elementares:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m, \quad \text{com} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{1.19}$$

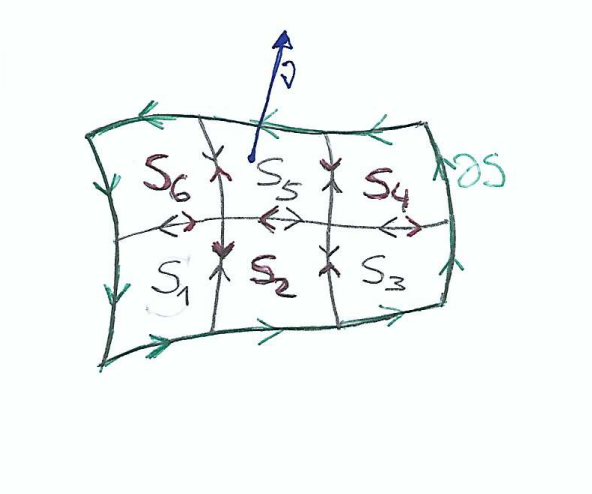


Figura 1.26: Uma decomposição de uma superfície S em seis superfícies elementares, $S_1, S_2, \ldots, S_6$. O bordo é indicado a verde, e a orientação, ν, a azul.

As superfícies $S_1, S_2, \ldots S_m$, que designamos por *elementos* (de S), encontram-se justapostas pelos seus bordos, sendo que a parte do bordo partilhado por dois elementos contíguos é percorrida em sentidos contrários. O bordo de S, denotado por ∂S, é a concatenação dos caminhos, dos bordos dos elementos, que estão contidos em apenas um dos elementos (a verde, na figura 1.26); o sentido de ∂S é o sentido desta concatenação. A normal ν, consistente com a orientação de ∂S, é dada pela normal de cada um dos elementos.

Pode-se provar que se S for orientável, então existe uma decomposição (1.19) com as propriedades acima descritas. Aplicando o teorema de Stokes a cada um dos elementos S_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, verifica-se que os caminhos dos ∂S_i que não pertencem ao bordo de S não aparecem no resultado final, pois os respectivos integrais cancelam. Como os caminhos interiores aparecem percorridos em ambos os sentidos, cancelando os integrais de linha ao longo dos caminhos percorridos nos dois sentidos contrários, obtém-se:

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS \;=\; \int_{\partial S} F \cdot d\gamma. \tag{1.20}$$

Na formula (1.20) o bordo de S, ∂S, é uma colecção de caminhos de onde se removeram todos os pares de caminhos constituídos pela mesma curva percorrida em sentidos opostos. A colecção de caminhos que constitui ∂S designa-se uma *cadeia*.

1.5.5 Exemplos

Nos exemplos seguintes calculamos o fluxo do rotacional do campo

$$F(x, y, z) \;=\; \big(-y,\, x,\, e^{z^2} \operatorname{sen}(x + y)\big)$$

através das superfícies:

(1) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ e } z > 0\}$, escolhendo uma orientação de S tal que $\nu(0,0,1)$ tem componente z positiva.

S é o hemisfério norte da esfera centrada na origem de raio 1. Esta semi-esfera é-nos descrita como o conjunto de nível 0 da função

$$G(x,y,z) \;=\; x^2+y^2+z^2-1$$

que é orientável, pois

$$\nabla G \;=\; (2x,2y,2z) \;=\; 2(x,y,z) \;\neq\; \mathbf{0} \qquad \text{em } S.$$

Assim sendo, a orientação pretendida para S (de acordo com o enunciado deve ter componente z positiva) é

$$\nu \;=\; \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} \;=\; (x,y,z).$$

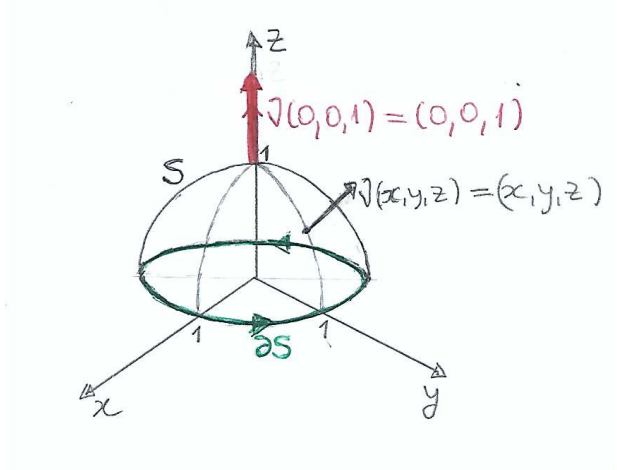


Figura 1.27: Sentido de ∂S compatível com a orientação da semi-esfera S.

Por outro lado, o bordo

$$\partial S \;=\; \{(x,y,0) : x^2+y^2 = 1\}$$

é a circunferência no plano xOy (ou seja, o plano $z=0$) centrada na origem e de raio 1. Então

$$\gamma(t) \;=\; \big(\cos t,\, \operatorname{sen} t,\, 0\big) \qquad \text{com } 0 < t < 2\pi$$

é um caminho com sentido compatível com a orientação de S.

Pelo teorema de Stokes, o fluxo do rotacional de F através de S (com orientação de baixo para cima) é:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS \;&=\; \int_{\partial S} F \cdot d\gamma \\
&=\; \int_0^{2\pi} \big(-\operatorname{sen} t,\, \cos t,\, \cdots\big) \cdot \big(-\operatorname{sen} t,\, \cos t,\, 0\big)\, dt \\
&=\; \int_0^{2\pi} \big(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\big)\, dt \;=\; 2\pi.
\end{aligned}$$

(2) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } 0 < z < 1\}$, escolhendo a normal que "aponta para fora" (no sentido em que, quando somada a um ponto do cilindro, aumenta a sua norma).

Trata-se da superfície do exemplo 3 da secção 1.5.2, onde vimos que S não era elementar. Podemos, contudo, pensar em S como a união das duas superfícies elementares: as metades do cilíndro, S_1 e S_2, dadas pelas parametrizações $g_1 : T_1 \to S$ e $g_2 : T_2 \to S$, onde

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(\theta, z) : 0 \leq \theta \leq \pi \text{ e } 0 \leq z \leq 1\}, \\ T_2 &= \{(\theta, z) : \pi \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq z \leq 1\}, \end{aligned}$$

e, como anteriormente,

$$g_1(\theta, z) = g_2(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$$

Note que g_1 e g_2 são as restrinções de $g : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to S$ a T_1 e T_2, respectivamente, onde g é dada por $g(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$.

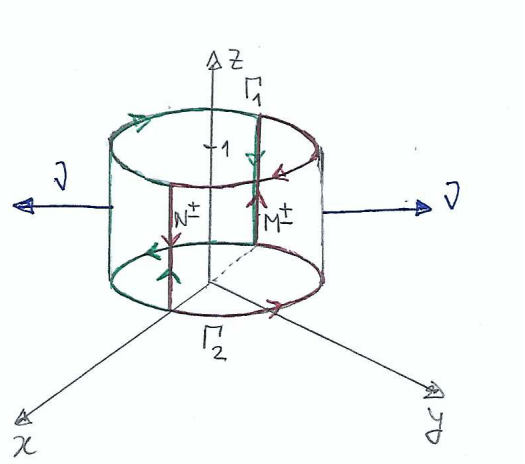


Figura 1.28: Bordo e orientação da superfície cilíndrica S compatível com o sentido de ∂S.

Tanto M como N não pertencem ao bordo de S mas sim ao interior da superfície cilíndrica, sendo que os correspondentes caminhos cancelam. Desta forma, o bordo de S é

$$\partial S = \Gamma_0 \cup \Gamma_1.$$

Vejamos agora qual é a orientação de S induzida por g_1 e g_2. Calculando as derivadas parciais

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta} &= (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

o seu produto externo é

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \theta}\times\frac{\partial g}{\partial z} &= \begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\\ \left\|\frac{\partial g}{\partial \theta}\times\frac{\partial g}{\partial z}\right\| &= \sqrt{\cos^2\theta+\cos^2\theta}=1.\end{aligned}$$

Então, a orientação induzida por g_1 e g_2 é

$$\nu = \big(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0\big).$$

Quanto ao bordo de S (ver figura 1.30),

$$\begin{aligned}\partial S &= \Gamma_0\cup\Gamma_1,\\ \Gamma_0 &= \big\{(x,y,0): x^2+y^2=1\big\},\\ \Gamma_1 &= \big\{(x,y,1): x^2+y^2=1\big\},\end{aligned}$$

as parametrizações das duas curvas que forma ∂S, Γ_0 e Γ_1, podem ser facilmente dadas por $g\circ\gamma_0$ e $g\circ\gamma_1$, com

$$\begin{aligned}\gamma_0(\theta) &= (\theta,0), \quad \theta\in[0,2\pi]\\ \gamma_1(\theta) &= (2\pi-\theta,1), \quad \theta\in[0,2\pi]\end{aligned}$$

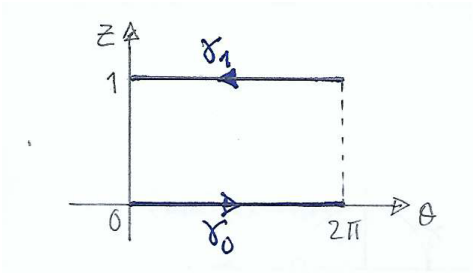


Figura 1.29: Os caminhos γ_0 e γ_1, a partir dos quais se obtém o bordo de S.

A circunferência inferior do bordo, Γ_0, é dada por

$$g\big(\gamma_0(\theta)\big) = g(\theta,0) = \big(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0\big), \quad \theta\in[0,2\pi],$$

e a circunferência superior do bordo, Γ_1, é dada por

$$g\big(\gamma_1(\theta)\big) = g(2\pi-\theta,1) = \big(\cos(2\pi-\theta), \operatorname{sen}(2\pi-\theta), 1\big) = \big(\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 1\big), \ \ \theta\in[0,2\pi].$$

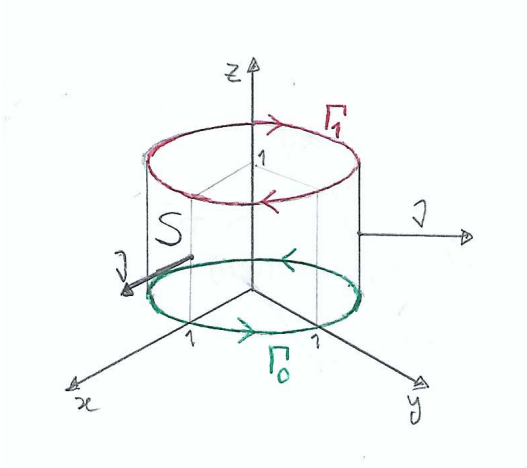


Figura 1.30: Bordo e orientação da superfície cilíndrica S compatível com o sentido de ∂S.

Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} S \cdot \nu \, dS &= \int_{\partial S} F \cdot d\gamma = \int_{\Gamma_0} F \cdot d\gamma_0 + \int_{\Gamma_1} F \cdot d\gamma_1 \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, \cdots \big) \cdot \big(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0 \big) \, d\theta \\
&\qquad + \int_0^{2\pi} \big(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, \cdots \big) \cdot \big(-\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, 0 \big) \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \big(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \big) \, dt + \int_0^{2\pi} \big(-\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta \big) \, d\theta = 0.
\end{aligned}$$

1.5.6 Potencial Vectorial

O teorema de Stokes tem a desvantagem de só ser aplicável a campos vectoriais que são da forma $\operatorname{rot} F$. Embora isso não constitua problema em algumas aplicações (por exemplo, as leis de Maxwell, do electromagnetismo, que mencionam explicitamente os rotacionais do campo eléctrico e do campo magnético), pode noutros casos não ser assim.

Dado um campo vectorial $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 (onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é aberto) consideremos pois o problema da determinação de um outro campo vectorial $A : \Omega \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$F = \operatorname{rot} A \qquad (\text{em } \Omega).$$

A é designado de *potencial vectorial* de F. Se tal potencial vectorial de F existir, ele permite-nos o cálculo do fluxo de F através de uma superfície por aplicação do teorema de Stokes. Em que condições é então possível a sua determinação?

Para deduzir uma condição necessária, admitamos que existe A tal que

$$F = \operatorname{rot} A.$$

Então (verifique as duas últimas igualdades):

$$\operatorname{div} F \;=\; \operatorname{div}(\operatorname{rot} A) \;=\; \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \;=\; 0.$$

Condição necessária para a existência de um potencial vectorial Seja $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 em Ω. Se existe um potencial vectorial para F então $\operatorname{div} F = 0$. Esta condição é necessária mas não suficiente.

Para caso de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ em estrela podemos considerar, sem perda de generalidade, que a origem é o centro da estrela. Admitindo então que $\operatorname{div} F = 0$ em Ω, seja $A : \Omega \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$A(x,y,z) \;=\; \int_0^1 F(tx,ty,tz) \times (tx,ty,tz)\, dt$$

Para verificar que A é um potencial vectorial de F, usamos a notação $P = (x,y,z)$, $F = (F_1,F_2,F_3)$ e $A = (A_1,A_2;A_3)$. As componentes de A são dadas por:

$$A_1 \;=\; \int_0^1 t\Big(zF_2(tP) - yF_3(tP)\Big)\, dt$$

$$A_2 \;=\; \int_0^1 t\Big(xF_3(tP) - zF_1(tP)\Big)\, dt$$

$$A_3 \;=\; \int_0^1 t\Big(yF_1(tP) - xF_2(tP)\Big)\, dt.$$

Pela regra de Leibniz,

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \;=\; \int_0^1 t\left(F_1(tP) + ty\frac{\partial F_1}{\partial y} - tx\frac{\partial F_2}{\partial y} - tx\frac{\partial F_3}{\partial z} + F_1(tP) + tz\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) dt$$

onde todas as derivadas parciais que aparecem acima são calculadas em tP. Tendo em atenção que $\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \;&=\; \int_0^1 \left(2tF_1(tP) + t^2x\Big(\underbrace{-\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial z}}_{\parallel\ \frac{\partial F_1}{\partial x}}\Big) + t^2y\frac{\partial F_1}{\partial y} + t^2z\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)dt \\ &=\; \int_0^1 \left(2tF_1(tP) + t^2x\frac{\partial F_1}{\partial x} + t^2y\frac{\partial F_1}{\partial y} + t^2z\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) dt \\ &=\; \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(t^2F_1(tP)\Big)\, dt \\ &=\; F_1(P) \;=\; F_1(x,y,z). \end{aligned}$$

Identicamente:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \;=\; F_2(x,y,z) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \;=\; F_3(x.y.z).$$

Concluimos assim que:

$$F \;=\; \operatorname{rot} A \qquad \text{em } \Omega.$$

□

Isto mostra o seguinte teorema.

Teorema. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto em estrela e $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 tal que $\operatorname{div} F = 0$. Então existe $A : \Omega \to \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot} A = F$ em Ω. Se a origem for um centro para a estrela Ω, então é válida a fórmula:

$$A(x,y,z) \;=\; \int_0^1 F(tx,ty,tz) \times (tx,ty,tz)\, dt. \tag{1.21}$$

Se $F = \operatorname{rot} A$ então $A + \nabla\phi$, para um campo escalar $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2, também é um potencial vectorial de F, pois

$$\operatorname{rot}(A + \nabla\phi) \;=\; \operatorname{rot} A + \underbrace{\operatorname{rot}(\nabla\phi)}_{\|\,0} = \operatorname{rot} A = F$$

(Verifique que $\operatorname{rot}(\nabla\phi) = 0$). Isto mostra, em particular, que o problema da determinação de um potencial vectorial tem uma infinidade de soluções.

Podemos também usar o facto anterior para simplificar os cálculos. Por exemplo, tomando

$$\phi(x,y,z) \;=\; -\int_0^z A_3(x,y,t)\, dt$$

então

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -A_3(x,y,z)$$

pelo que a terceira componente de $A + \nabla\phi$ é

$$A_3(x,y,z) + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0.$$

Isto significa que existe pelo menos um potencial vectorial de F da forma $A = (A_1, A_2, 0)$. Sendo que tal A satisfaz

$$\operatorname{rot} A \;=\; F \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & 0 \end{vmatrix} \;=\; (F_1, F_2, F_3)$$

o que é equivalente a

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial A_2}{\partial z} &= F_1 \\ \dfrac{\partial A_1}{\partial z} &= F_2 \\ \dfrac{\partial A_2}{\partial x} - \dfrac{\partial A_1}{\partial y} &= F_3. \end{cases} \tag{1.22}$$

Exemplo. Considere $F(x,y,z) = (0,x,0)$.

(a) Calcular um potencial vectorial de F em $\mathbb{R}^3$.

Podemos obviamente utilizar a equação (1.21):

$$\begin{aligned} A(x,y,z) &= \int_0^1 F(tx,ty,tz) \times (tx,ty,tz)\, dt \\ &= \int_0^1 \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & tx & 0 \\ tx & ty & tz \end{vmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \left(t^2xz,\, 0,\, -t^2x^2\right) dt \\ &= \left(\tfrac{1}{3}xz,\, 0,\, -\tfrac{1}{3}x^2\right). \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos determinar um potencial vectorial da forma $A = (A_1, A_2, 0)$ resolvendo (1.22):

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial A_2}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial A_1}{\partial z} = x \\ \dfrac{\partial A_2}{\partial x} - \dfrac{\partial A_1}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A_2 = K_2(x,y) \\ A_1 = xz + K_1(x,y) \\ \dfrac{\partial K_2}{\partial x} - \dfrac{\partial K_1}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Para determinar uma solução, basta tomar $K_1(x,y) = K_2(x,y) = 0$ para todos os $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Obtém-se assim

$$A(x,y,z) = \left(xz,\, 0,\, 0\right). \tag{1.23}$$

(b) Determinar o fluxo de F através de

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ com } z < 1\right\}.$$

com a normal escolhida de forma a que $\nu_z < 0$.

Vamos utilizar o potencial vectorial (1.23). O bordo de S é

$$\partial S = \left\{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

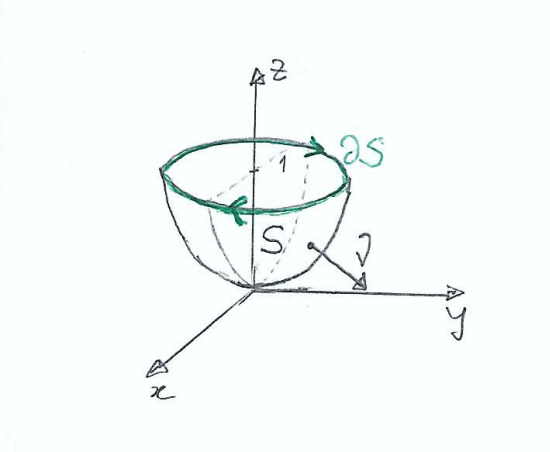


Figura 1.31: Sentido de ∂S compatível com a orientação do parabolóide S. Como ν aponta para baixo, ∂S deve ter o sentido positivo quando vista de baixo (e o sentido horário quando vista de cima).

Escolhemos uma parametrização de ∂S cujo sentido é compatível com a orientação dada:

$$\gamma(t) = \big(\cos t, -\operatorname{sen} t, 1\big)$$

Então, pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}
\int_S F \cdot \nu dS &= \int_S \operatorname{rot} A \cdot \nu \, dS = \int_{\partial S} A \cdot d\gamma \\
&= \int_0^{2\pi} \big(\cos t,\, 0,\, 0\big) \cdot \big(-\operatorname{sen} t,\, -\cos t,\, 0\big)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen} t \cos t \, dt = \tfrac{1}{2}\cos^2 t \Big|_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$