Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 9 de Abril de 2011 - 9h - Versão 2
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

(3 val.) 1. Considere a função

$$h(x,y) = \begin{cases} 2 - \frac{y^3(x^2+y^2)}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 2, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que h é contínua na origem.

2. Seja $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$.

(1,5 val.) (a) Determine um vector $v \in \mathbb{R}^3$, não nulo, tal que a derivada de f segundo v no ponto $(1,1,1)$ seja 0.

(2 val.) (b) Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $\alpha(1) = (1,1,1)$ e $\alpha'(1) = (3,2,1)$. Calcule $(f \circ \alpha)'(1)$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos de $g(x,y) = (1+x^2)e^{y^2}$.

4. Considere o conjunto

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : e^x + e^y + z = 3;\ x - z + 1 = 0\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que L é uma variedade e indique a sua dimensão.

(2 val.) (b) Mostre que L é o gráfico de uma função $f(y) = (x(y), z(y))$, de classe C^1, numa vizinhança do ponto $(0,0,1)$ e calcule $x'(0)$.

(2,5 val.) 5. Determine o vector de $\mathbb{R}^3$ cujo comprimento é igual a 3 e cuja soma das componentes é a maior possível.

(2 val.) 6. Determine um ponto da superfície $z = 2 - xy$ para o qual a recta normal à superfície nesse ponto passa na origem.

(2 val.) 7. Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^n$ duas variedades com $\dim M = m, \dim N = k$ e tal que para todo o $p \in M \cap N \neq \emptyset$ se tem $(T_pM)^\perp \cap (T_pN)^\perp = \{0\}$. Mostre que $M \cap N$ é uma variedade, determine a sua dimensão e determine o espaço tangente $T_p(M \cap N)$.