

Cálculo Diferencial e Integral II

TESTE 2 - VERSÃO A

4 de Junho de 2011 - das 9h30m às 11h

Resolução abreviada

1. Considere o conjunto

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}; 0 \leq y \leq x \right\}.$$

- [3 val.] (a) Escreva uma expressão para o volume de D como integrais iterados da forma $\int (\int (\int dz) dx) dy$.

Resolução:

O conjunto D é dado de forma equivalente por

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}; (x, y) \in R \right\},$$

onde R é a região planar:

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x; \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \right\},$$

ou seja, analisando os cortes y igual constante de R :

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}; y \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \right\}.$$

Assim obtem-se a expressão para o volume de D :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_y^{\sqrt{1-y^2}} \left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} 1 dz \right) dx \right) dy.$$

- [3 val.] (b) Calcule a massa do sólido descrito por D , com densidade de massa dada por $\sigma(x, y, z) = z$.

Resolução:

O sólido D tem simetria cilíndrica à volta do eixo Oz , motivando uma mudança de coordenadas para coordenadas cilíndricas ρ, θ, z . O intervalo para θ é: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Os cortes θ igual constante não dependem

de θ e são dados por: $0 \leq \varrho \leq 1$; $0 \leq z \leq 1 - \varrho$. Assim a massa é dada por:

$$\begin{aligned} \iiint_D \sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \int_0^{1-\varrho} z \varrho \, dz \, d\varrho \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \frac{1}{2} (1-\varrho)^2 \varrho \, d\varrho \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\varrho^2}{2} - \frac{2\varrho^3}{3} + \frac{\varrho^4}{4} \right]_0^1 d\theta = \frac{\pi}{96}. \end{aligned}$$

- [3 val.] 2. Considere o campo vectorial $G(x, y) = (-y + x^3, x + y^5) + \nabla\psi(x, y)$ onde $\psi(x, y) = \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right)$. Calcule o trabalho de G ao longo da fronteira do quadrado $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1; |y| \leq 1\}$ percorrida no sentido anti-horário.

Resolução:

Pelo teorema fundamental dos integrais de trabalho, o trabalho do termo $\nabla\psi(x, y)$ é nulo, porque a fronteira C do quadrado é uma linha fechada. Para calcular o trabalho do campo $(-y + x^3, x + y^5)$, aplicamos o teorema de Green ao quadrado Q . Assim o trabalho de G ao longo de C é dado por:

$$\begin{aligned} \int_C G \cdot dg &= \int_C (-y + x^3, x + y^5) \cdot dg \\ &= \iint_Q \frac{\partial(x + y^5)}{\partial x} - \frac{\partial(-y + x^3)}{\partial y} \\ &= \iint_Q 2 = 2\text{vol}_2(Q) = 8. \end{aligned}$$

3. Sejam $F(x, y, z) = (x, y, z + 1)$,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2; y > 0; z > 0\}$$

e seja $n = (n_1, n_2, n_3)$ a normal a S , unitária, tal que $n_3 > 0$.

- [2 val.] (a) Calcule a área de S .

Resolução: Seja $g:]0, 1[\times]0, \pi[\rightarrow S$ a parametrização dada por

$$g(\varrho, \theta) = (\varrho \cos \theta, \varrho \sin \theta, 1 - \varrho^2).$$

Temos

$$\frac{\partial g}{\partial \varrho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & -2\varrho \\ -\varrho \sin \theta & \varrho \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (2\varrho^2 \cos \theta, 2\varrho^2 \sin \theta, \varrho),$$

logo

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(S) &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varrho} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \right\| d\varrho \right) d\theta = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \sqrt{4\varrho^4 + \varrho^2} d\varrho \right) d\theta \\ &= \pi \int_0^1 \varrho \sqrt{4\varrho^2 + 1} d\varrho = \pi \left[\frac{(4\varrho^2 + 1)^{3/2}}{12} \right]_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12} \pi. \end{aligned}$$

[3 val.] (b) Calcule o fluxo $\iint_S F \cdot n$ pela definição.

Resolução: Note-se que a terceira componente da normal $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varrho} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta}$ é positiva pelo que g é compatível com a orientação dada por n . Assim,

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot n &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 F(\mathbf{g}(\varrho, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varrho} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \right) d\varrho \right) d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 (\varrho \cos \theta, \varrho \sin \theta, 2 - \varrho^2) \cdot (2\varrho^2 \cos \theta, 2\varrho^2 \sin \theta, \varrho) d\varrho \right) d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 (2\varrho^3 + 2\varrho - \varrho^3) d\varrho \right) d\theta = \pi \int_0^1 (\varrho^3 + 2\varrho) d\varrho \\ &= \pi \left[\frac{\varrho^4}{4} + \varrho^2 \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

[3 val.] (c) Calcule o fluxo $\iint_S F \cdot n$ usando o Teorema da Divergência.

Resolução: Sejam T_y e T_z as seguintes superfícies planas:

$$\begin{aligned} T_y &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, 0 < z < 1 - x^2\}, \\ T_z &= \{(x, y, z) : z = 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\} \end{aligned}$$

e seja D o sólido limitado por S , T_y e T_z . A normal untária exterior a D coincide com n nos pontos de S , pelo que a designamos também por n .

Aplicando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot n + \int_{T_y} F \cdot n + \int_{T_z} F \cdot n &= \int_D \text{div}(F) = \int_D 3 \\ &= 3 \int_0^\pi \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-\varrho^2} \varrho dz \right) d\varrho \right) d\theta \\ &= 3\pi \int_0^1 (1 - \varrho^2)\varrho d\varrho = -3\pi \left[\frac{(1 - \varrho^2)^2}{4} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned}\int_{T_y} F \cdot n &= \int_{T_y} F \cdot (0, -1, 0) = - \int_{T_y} y = 0 \\ \int_{T_z} F \cdot n &= \int_{T_z} F \cdot (0, 0, -1) = - \int_{T_z} (z + 1) = - \text{vol}_2(T_z) = -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

portanto, concluímos que

$$\int_S F \cdot n = \int_D \text{div}(F) - \int_{T_y} F \cdot n - \int_{T_z} F \cdot n = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}.$$

[3 val.] 4. Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio regular e

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Considere a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y); (x, y) \in D\}.$$

Prove o Teorema de Stokes para a superfície S e para um campo vectorial de classe C^1 , F , da forma $F = (F_1, F_2, 0)$.

Sugestão: Use o Teorema de Green.

Resolução: Uma vez que S é o gráfico de $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, a função $g: D \rightarrow S$ dada por

$$g(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

é uma parametrização para S .

Da mesma forma, se $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma parametrização para ∂D , a função $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = (\gamma(t), f(\gamma(t)))$$

é uma parametrização para ∂S .

Temos

$$\begin{aligned}\text{rot}(F_1, F_2, 0) &= \left(-\frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right).\end{aligned}$$

Note-se que a terceira componente da normal $n = \|\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y}\|^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right)$ é positiva. Portanto, percorrendo ∂S do lado indicado por n , de forma a que S

fique à esquerda, a projecção no plano $z = 0$ percorre a curva ∂D no plano xOy de forma a que D fique à esquerda.

Assim,

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot}(F_1, F_2, 0) \cdot n &= \iint_D \left(-\frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \iint_D \frac{\partial}{\partial x} (F_2(x, y, f(x, y))) - \frac{\partial}{\partial y} (F_1(x, y, f(x, y))) \\ &= \oint_{\partial D} F_1(x, y, f(x, y)) dx + F_2(x, y, f(x, y)) dy, \end{aligned}$$

onde a última igualdade resulta da aplicação do Teorema de Green e ∂D é percorrido de forma a que D fique à esquerda.

Seja agora $\gamma: I \rightarrow \partial D$ uma parametrização que percorre ∂D de forma a que D fique à esquerda e seja $\alpha: I \rightarrow \partial S$ como acima. Das observações anteriores acerca relação entre os sentidos de γ e α , concluímos que α tem a orientação induzida por n e

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} F \cdot d\alpha &= \int_I F(\alpha(t)) \cdot \left(\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \frac{\partial f}{\partial x} \gamma'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \gamma'_2(t) \right) dt \\ &= \int_I (F_1(\alpha(t)) \gamma'_1(t) + F_2(\alpha(t)) \gamma'_2(t)) dt \\ &= \oint_{\partial D} F_1(x, y, f(x, y)) dx + F_2(x, y, f(x, y)) dy, \end{aligned}$$

onde ∂D é percorrido de forma a que D fique à esquerda.

Portanto ,

$$\iint_S \text{rot}(F_1, F_2, 0) \cdot n = \oint_{\partial S} F \cdot d\alpha.$$