COMBINATÓRIA E TEORIA DE CÓDIGOS

TPC 4 (para entregar na aula de 26/4/2013)

1. Seja C um código binário, linear e auto-dual.

   (a) Mostre que, se os pesos de $x, y \in C$ são múltiplos de 4, então o peso de $x + y$ também é um múltiplo de 4.

   (b) Mostre que ou todas as palavras de C têm peso um múltiplo de 4, ou metade tem peso um múltiplo de 4 e a outra metade tem peso par mas não divisível por 4.

   (c) Mostre que $\vec{1} = (1, \dots, 1) \in C$.

   (d) Se o código C tem comprimento 6, determine a distância mínima $\mathrm{d}(C)$.

2. Sem escrever as palavras de código, determine o número de palavras de peso 4 no código de Hamming binário estendido $\widehat{\mathrm{Ham}}(3, 2)$.

3. Para qualquer código C define-se o *polinómio enumerador de pesos*[1] por $W_C(t) = \sum_{i \geq 0} A_i t^i$, onde

$$A_i = \#\{x \in C \, : \, \mathrm{w}(x) = i\} \ .$$

   Seja $C \subset \mathbb{F}_2^8$ um código linear auto-dual. Determine todos os possíveis polinómios enumeradores de pesos para C. Dê um exemplo de um código auto-dual para cada um dos polinómios encontrados.

4. Seja C um código binário perfeito de comprimento n e distância mínima $2t + 1$. Mostre que existe um sistema de Steiner $S(t + 2, 2t + 2, n + 1)$.

5. Determine o polinómio enumerador de pesos do código de Golay estendido G_{24}. [Sugestão: Mostre que $\vec{1} \in G_{24}$.]

6. Exercício bónus: na continuação do Exercício 3, mostre que, se C e C' são códigos binários auto-duais de comprimento 8 com o mesmo polinómio enumerador de pesos, então C e C' são códigos equivalentes.

---

[1] Note que o polinómio $W_C(t)$ não é mais que a função geradora da sucessão $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$