

Combinatória e Teoria de Códigos

1º Teste – 11 de Abril de 2013

Duração: 1h 30m

(Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.)

1. Seja C um código linear $[n, k, d]$ sobre \mathbb{F}_q e considere as suas secções

$$C_{a,i} = \{(x_1, \dots, x_n) \in C : x_i = a\},$$

onde $a \in \mathbb{F}_q$ e $i \in \{1, \dots, n\}$.

- (a) (1,5 val.) Para cada $1 \leq i \leq n$, justifique que $C_{0,i}$ é um código linear e determine a sua dimensão.
- (b) (2 val.) Para cada $a \in \mathbb{F}_q$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, quantas palavras contém $C_{a,i}$?
[Sugestão: considere primeiro o caso $a = 0$.]
- (c) (2,5 val.) Seja C o código sobre \mathbb{F}_7 com matriz de paridade $H = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$ e seja

$$C' = \{(x_1, \dots, x_n) \in C : x_i \neq 1 \ \forall i = 1, \dots, 6\}.$$

Use o Princípio de Inclusão-Exclusão para determinar $|C'|$.

2. Considere o código $C = \langle(1, \alpha, \alpha^2, 1, \alpha^2)\rangle$ sobre $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[\alpha]$, onde $\alpha^2 = \alpha + 1$.

- (a) (1,5 val.) Indique, justificando, os parâmetros de C e escreva uma matriz de paridade.
- (b) (1,5 val.) Será C linearmente equivalente a um código de repetição? Justifique detalhadamente a sua resposta.
- (c) (1 val.) Justifique que C é um espaço vectorial sobre \mathbb{F}_2 e determine uma base.
- (d) (2 val.) Determine uma matriz geradora para o subcódigo subcorpo $(C^\perp)|_{\mathbb{F}_2} = C^\perp \cap \mathbb{F}_2^5$.

3. (2 val.) Determine todos os códigos binários lineares e auto-duais de comprimento 4.

4. Seja C o código binário linear com a seguinte matriz de paridade

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) (1,5 val.) Indique, justificando, os parâmetros $[n, k, d]$ do código C .
- (b) (2,5 val.) Mostre que C pode ser usado para corrigir os erros da forma

1000000, 1100000, 1110000, 1111000, 1111100, 1111110 e 1111111,

e decodifique os seguintes vectores recebidos $y = 0011111$ e $z = 0100011$.

- (c) (2 val.) Poderá C ser usado para corrigir mais erros para além dos indicados na alínea anterior?