Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Combinatória e Teoria de Códigos

Teste 1 – 20 de Abril de 2017

Duração: 1h 30m

- **Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.**
- **Não é permitido o uso de máquinas calculadoras, telemóveis, nem de outros elementos de consulta.**

1. (3 val.) Determine a solução da relação de recorrência

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3} & \text{para } n \geq 3 \\ a_0 = a_1 = 0 \\ a_2 = 9 \end{cases} .$$

Sugestão: Note que se trata de uma relação linear e homogénea.

2. (2 val.) Sejam $x, y \in \mathbb{F}_2^n$, com $n \geq 1$, tal que $\mathrm{w}(x) = \mathrm{w}(y) = \mathrm{w}(x \cap y)$. Mostre que $x = y$.

3. (a) (1 val.) Mostre que o polinómio $f(t) = t^2 + 1$ é irredutível em $\mathbb{F}_3[t]$.

(b) (3 val.) Considere o corpo $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[\alpha]$ onde $\alpha^2 + 1 = 0$ (i.e. $\alpha \in \mathbb{F}_9$ é raiz de $f(t)$). Decida, justificando, se α e/ou $\beta = 2 + \alpha$ são elementos primitivos em $\mathbb{F}_9$.

(c) (2 val.) Para $a \in \{\alpha, \beta\}$, considere os códigos lineares C_a sobre $\mathbb{F}_9$ com matriz de paridade

$$H_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 \end{bmatrix} .$$

Decida se C_a é um código de Hamming e indique os parâmetros $[n, k, d]$ de C_a.

(d) (5 val.) Para cada um dos códigos C_α e C_β definidos em (c), descodifique se possível, usando descodificação **incompleta** por distância mínima, o vector recebido

$$y = (\alpha, 2, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 0) .$$

Justifique cuidadosamente a sua resposta.

4. Seja C um código linear binário com matriz de paridade

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Determine uma matriz de paridade para cada um dos seguintes códigos:

(a) (2 val.) o dual $C^\perp$;

(b) (2 val.) o subcódigo $C' = \{x \in C \mid \mathrm{w}(x) \text{ é par}\}$.