Fundamentos de Álgebra – 2013/14

Exercícios extra a acrescentar à secção IV.3 da Lista 8 de problemas:

1. Dado um anel comutativo A, A^n tem uma estrutura de módulo-$M_n(A)$ identificando os vectores em A^n com as matrizes coluna e o produto por escalares $M_n(A) \times A^n \to A^n$ dado por multiplicação de matrizes $(X, v) \mapsto Xv$.

   (a) Mostre que A^n não é um módulo-$M_n(A)$ livre. (Sugestão: Verifique que $\{v\}$ é linearmente dependente sobre $M_n(A)$ para qualquer $v \in A^n$.)

   (b) Mostre que A^n é um módulo-$M_n(A)$ projectivo. (Sugestão: Identifique A^n com um submódulo N de $M_n(A)$ e mostre que N é um somando directo de $M_n(A)$.)

2. Seja A um anel comutativo. Dados dois módulos-A, P e M, o conjunto $\hom_A(P, M)$ tem uma estrutura de módulo-A definida por

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) \qquad \text{e} \qquad (af)(v) = af(v) \quad \forall\, v \in P \ ,$$

   com $f, g \in \hom_A(P, M)$ e $a \in A$.

   (a) Dado um homomorfismo de módulos-A, $g : M \to N$, define-se

$$g_* : \hom_A(P, M) \to \hom_A(P, N)$$

   por $g_*(\varphi) := g \circ \varphi$. Mostre que a aplicação g_* é um homomorfismo de módulos-A.

   (b) Seja

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

   uma sucessão curta exacta de módulos-A.

   (i) Se P é um módulo-A qualquer, mostre que

$$0 \longrightarrow \hom_A(P, L) \xrightarrow{f_*} \hom_A(P, M) \xrightarrow{g_*} \hom_A(P, N)$$

   é uma sucessão exacta.

   (ii) Mostre que g_* é sobrejectivo se e só se P é um módulo-A projectivo.

Observações.

1. Se A é um anel comutativo, para cada módulo-A, P, a aplicação

$$\hom_A(P, -) : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A$$

dada por $M \mapsto \hom_A(P, M)$ e $g \mapsto g_*$ é um functor.

Na alínea (b)(i) do exercício anterior, pede-se para provar que $\hom_A(P, -)$ é um *functor exacto à esquerda* (i.e. preserva o "lado esquerdo" de uma sucessão curta exacta), e na alínea (b)(ii) que é um *functor exacto* (i.e. preserva sucessões curtas exactas) se e só se P é um módulo projectivo.

Analogamente, a aplicação

$$\hom_A(-, I) : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A$$

dada por $M \mapsto \hom_A(M, I)$ e $g \mapsto g^*$ é um functor contravariante, onde g^* é definido por $g^*(\varphi) := \varphi \circ g$. Este functor contravariante é *exacto à esquerda*, i.e., dada uma sucessão exacta como no Exercício 2.(b), então

$$0 \longrightarrow \hom_A(N, I) \xrightarrow{g^*} \hom_A(M, I) \xrightarrow{f^*} \hom_A(L, I)$$

é uma sucessão exacta de módulos-A. Além disso, $\hom_A(-, I)$ é um functor exacto se e só se I é um módulo-A injectivo.

2. Estes resultados envolvendo os functores $\hom_A(P, -)$ e $\hom_A(-, I)$ podem ser generalizados para um anel A não necessariamente comutativo mas, nesse caso, os conjuntos $\hom_A(P, M)$ têm apenas uma estrutura de grupo abeliano. Para se definir o produto por um escalar à *direita* é necessário que M seja um bimódulo.