Fundamentos de Álgebra – 2013/14

Lista 11 de problemas

1. Determine a forma canónica de Jordan das seguintes matrizes em $M_4(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Seja k um corpo, V um espaço vectorial-k e $T \in \mathrm{End}_k(V)$. Considere a habitual estrutura de módulo-$k[x]$ em V induzida por $x\mathbf{v} := T(\mathbf{v})$. Mostre que

$$k[x] \otimes_{k[x]} V \cong k[x] \otimes_k V / \langle \{ x \otimes \mathbf{v} - 1 \otimes T\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V \} \rangle$$

como módulos-$k[x]$.

3. Determine as classes de conjugação em $GL_3(\mathbb{C})$, $GL_3(\mathbb{Z}_2)$ e $GL_4(\mathbb{R})$.

4. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostre que A é conjugada a uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{bmatrix},$$

onde cada B_j ou é um bloco de Jordan para um valor próprio $\lambda_j \in \mathbb{R}$, ou é da forma

$$B_j = \begin{bmatrix} A_j & I & & \\ & A_j & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & A_j \end{bmatrix},$$

com $A_j = \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ e $b_j \neq 0$, e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Sugestão: Considere a inclusão $M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$, e determine uma base apropriada para $\mathbb{R}^n$ à custa de uma base de $\mathbb{C}^n$ que transforme A na sua forma canónica de Jordan $J \in M_n(\mathbb{C})$. Para isso, considere casos separados para os valores próprios em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

5. Considere o espaço vectorial-k (onde k é um corpo)

$$V = \frac{k[x]}{(f(x))} \otimes_k \frac{k[x]}{(g(x))}$$

com a estrutura de módulo-$k[x]$ induzida por $T \in \mathrm{End}_k(V)$ definido por

$$T\big(\underline{a(x)} \otimes \underline{b(x)}\big) = \underline{xa(x)} \otimes \underline{xb(x)},$$

para $a(x), b(x) \in k[x]$. Determine as decomposições cíclicas invariante e primária de V como módulo-$k[x]$ quando

(a) $f(x) = g(x) = x^2 - 3$ e $k = \mathbb{Q}$;

(b) $f(x) = (x-3)^2$, $g(x) = x^2 - 1$ e $k = \mathbb{C}$.