FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA

TPC 4 (para entregar na aula de 15/10/2014)

Observação: Os exercícios numerados de 1 a 5 valem 20 pontos no total. O exercício bónus A vale 4 pontos extra.

1. (Exercício 1.12.4.) Seja G um grupo nilpotente finito e seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \mid |G|$. Mostre que existe $H < G$ tal que $|H| = m$.

2. (Exercício 1.12.5.) Seja G um grupo nilpotente finito e $N \lhd G$ tal que $N \neq \{\mathbf{1}\}$. Mostre que $N \cap C(G) \neq \{\mathbf{1}\}$.

3. (Exercício 1.12.9.) Seja $N \lhd G$. Mostre que $[N, G] < N$.

4. Um dos seguintes exercícios:

   (Exercício 1.13.4.) Prove que um grupo abeliano tem uma série de composição sse é finito.

   OU

   (Exercício 1.13.5.) Mostre que qualquer grupo resolúvel com uma série de composição é finito.

5. (Exercício 1.13.7.) Seja G o subgrupo de $(\mathbb{H}^\times, \cdot)$ gerado por $a = e^{\frac{\pi i}{3}}$ e $b = j$.

   (a) Calcule os subgrupos $C_k(G)$ e $G^{(k)}$, com $k \geq 1$, e decida se G é nilpotente e/ou resolúvel.

   (b) Determine uma série de composição para G e identifique os seus factores.

   Sugestão: Verifique que $|a| = 6$, $|b| = 4$ e $bab^{-1} = a^{-1}$; justifique que qualquer elemento de G se escreve na forma $a^r b^s$ com $r, s \geq 0$.

A. Exercício bónus: Mostre que não existe nenhum grupo cujo subgrupo derivado é o grupo diedral D_n, $n \geq 3$.
Sugestão: Suponha que existe um grupo G tal que $G^{(1)} = D_n$ e seja $K < G^{(1)}$ tal que $K \cong \mathbb{Z}_n$. Mostre que $\varphi \colon G \to \operatorname{Aut}(K)$, dado por $\varphi(g) = c_g$, é um homomorfismo de grupos e estude $\varphi(G^{(1)})$.