FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA

Exercício bónus do TPC 6

(para entregar na aula de 29/10/2014)

A. Prove a propriedade universal do anel $S^{-1}A$: Sejam A um anel comutativo e $S \subset A$ um subconjunto multiplicativo. Dado um anel comutativo B e um homomorfismo de anéis $f : A \to B$ tais que $f(S) \subset B^{\times}$, então existe um único homomorfismo $\bar{f} : S^{-1}A \to B$ tal que $\bar{f} \circ \varphi_S = f$, i.e., o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_S"'] & B \\
s^{-1}A \arrow[ur, "\exists!\,\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

onde $\varphi_S : A \to S^{-1}A$, $\varphi_S(a) = \frac{a}{1}$.

B. Seja A um anel comutativo e sejam S e T dois subconjuntos multiplicativos de A tais que $S \subset T$.

(a) Mostre que $\psi : S^{-1}A \to T^{-1}A$, dado por $\psi(\frac{a}{s}) = \frac{a}{s}$, define um homomorfismo de anéis.

(b) Se $T \setminus S \subset A^{\times}$, mostre que ψ é um isomorfismo.