Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Fundamentos de Álgebra

LMAC e MMA

Exame/Teste de Recuperação – 30 de Janeiro de 2014

Duração: exame 3h, teste 1h 30m

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

Teste 1

1. (1,5 val.) Seja G um grupo de ordem 45. Determine o número de subgrupos-p de Sylow para cada primo p e justifique que G é um grupo abeliano.

2. Seja G um grupo e seja $[G,G]$ o subgrupo derivado.
   (a) (1 val.) Mostre que $[G,G] \lhd G$ e que $G/[G,G]$ é um grupo abeliano.
   (b) (1 val.) Seja $H \lhd G$ tal que o quociente G/H é um grupo abeliano. Mostre que $[G,G]$ é subgrupo de H.
   (c) (1 val.) Mostre que $F(G) = G/[G,G]$ define um functor $F : \mathrm{Grps} \to \mathrm{Ab}$, onde Grps é a categoria dos grupos e Ab é a subcategoria dos grupos abelianos.

3. Seja A um d.i.p.
   (a) (1 val.) Seja I um ideal de A. Mostre que A/I é um anel de ideias principais.
   (b) (1,5 val.) Seja $S \subset A$ um subconjunto multiplicativo tal que $0 \notin S$. Mostre que $S^{-1}A$ é um d.i.p.

4. (a) (1,5 val.) Determine os ideais primos em $\mathbb{Z}_8$. Decida se $\mathbb{Z}_8$ é um anel local.
   (b) (1,5 val.) Determine os ideais primos em $S^{-1}\mathbb{Z}$, onde $S = \{2^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$. Decida se $S^{-1}\mathbb{Z}$ é um anel local.

Teste 2

5. Seja A um anel, sejam M, N e P módulos-A e seja $f : M \to N$ um homomorfismo de mólulos-A.

   (a) (1 val.) Mostre que $f_* : \hom_A(P, M) \to \hom_A(P, N)$, dado por $f_*(\alpha) = f \circ \alpha$, é um homomorfismo de módulos-A.

   (b) (1 val.) Se f é injectivo, mostre que f_* é também injectivo.

   (c) (1 val.) Se f é sobrejectivo e P é um módulo projectivo, mostre que f_* é sobrejectivo.

6. (1,5 val.) Descreva
$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathbb{Z} \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}_3 \right)$$
como uma soma directa, sem usar $\otimes$ na sua resposta final.

7. Seja A um anel comutativo e sejam M e N módulos-A livres.

   (a) (1,5 val.) Mostre que $M \otimes_A N$ é um módulo-A livre e indique uma base à custa de bases para M e N.

   (b) (1,5 val.) Se A é um domínio integral, mostre que $m \otimes n = 0$ se e só se $m = 0$ ou $n = 0$, para todo o $m \in M$ e $n \in N$.

   (c) (1 val.) Dê um exemplo de um anel comutativo A e módulos livres M e N tais que existem $m \in M \setminus \{0\}$ e $n \in N \setminus \{0\}$ com $m \otimes n = 0$.

8. (1,5 val.) Classifique, justificando detalhadamente, os grupos abelianos de ordem 600.