Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Fundamentos de Álgebra

LMAC e MMA

Exame/Teste de Recuperação – 29 de Janeiro de 2015

Duração: exame 3h, teste 1h 30m

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

Teste 1

1. Considere os seguintes subgrupos de S_6:

$$G = \langle (123), (456), (14)(25)(36) \rangle$$
$$N = \langle (123), (456) \rangle < G \quad \text{e} \quad H = \langle (14)(25)(36) \rangle < G \;.$$

   (a) (2 val.) Mostre que $G = N \rtimes H$.

   (b) (2 val.) Mostre que $N_G(H) = \langle H, (123)(456) \rangle$.

   (c) (3 val.) Determine os subgrupos de Sylow de G.
   Sugestão: Comece por contá-los.

   (d) (2 val.) Decida se G é um grupo resolúvel.

2. Seja $p \in \mathbb{Z}$ um número primo e considere o subconjunto $S = \mathbb{Z} \setminus (p) \subset \mathbb{Z}$.

   (a) (1 val.) Verifique que S é um conjunto multiplicativo.

   (b) (3 val.) Mostre que $\mathbb{Z}_{(p)} = S^{-1}\mathbb{Z}$ é um anel local com ideal maximal $S^{-1}(p)$.

   (c) (3 val.) Mostre que $\mathbb{Z}_{(p)}/S^{-1}(p) \cong \mathbb{Z}_p$ como anéis.

3. (4 val.) Seja $A \neq \{0\}$ um anel comutativo. Demonstre ou dê um contra-exemplo para cada uma das seguintes afirmações.

   (a) Se $A[x]$ é um d.i.p. então A é um d.i.p.

   (b) Seja $c \in A \setminus \{0\}$. Então c é irredutível se e só se (c) é um ideal maximal.

Teste 2

4. Seja $A \neq \{0\}$ um anel comutativo. Recorde que o dual de um módulo-A M é o módulo-A definido por $M^* = \hom_A(M, A)$.

   (a) (1 val.) Justifique que $A^* \cong A$.

   (b) (2 val.) Seja $f\colon M \to N$ um homomorfismo de módulos-A. Verifique que $f^*\colon N^* \to M^*$, dado por $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$, é um homomorfismo de módulos-A.

   (c) (2 val.) Justifique que $M \mapsto M^*$ e $f \mapsto f^*$ define um functor (contravariante) F : $\mathsf{Mod}_A \to \mathsf{Mod}_A$.

   (d) (2 val.) Mostre que $(M \oplus N)^* \cong M^* \oplus N^*$, para quaisquer módulos-A M e N.

   (e) Seja A um domínio integral e M um módulo-A.

      (i) (2 val.) Mostre que M^* é livre de torção.

      (ii) (2 val.) Se M é um módulo de torção, mostre que $M^* = \{0\}$.

   (f) (3 val.) Assumindo que A é um d.i.p. e que M e N são módulos-A finitamente gerados, mostre que $(M \otimes N)^* \cong M^* \otimes N^*$.

5. (3 val.) Seja M o módulo-$\mathbb{Z}[i]$ com geradores x e y e relações determinadas por

$$3ix + (6+3i)y = 0 \ ,$$
$$6x + (3-6i)y = 0 \ .$$

   Determine os factores invariantes de M.

6. (3 val.) Determine o número de representações complexas irredutíveis, e as respectivas dimensões, do grupo A_4.