Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Fundamentos de Álgebra

LMAC e MMA

Teste 1 – 18 de Novembro de 2014

Duração: 1h 30m

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Seja G um grupo finito, $p \in \mathbb{N}$ um primo e $H < G$ tal que $p \mid |H|$. Prove as seguintes afirmações:
   (a) (1,5 val.) Se P é um subgrupo-p de Sylow de H e $p \nmid [G : H]$, então P é um subgrupo-p de Sylow de G.
   (b) (3 val.) Se P é um subgrupo-p de Sylow de G tal que $P \lhd G$, então $P \cap H$ é um subgrupo-p de Sylow de H.

2. (a) (2,5 val.) Seja G um grupo e $H \lhd G$ tal que G/H é um grupo abeliano. Mostre que $[G, G] < H$.
   (b) (2 val.) Seja $D_{40} = \langle a, b \mid |a| = 40, |b| = 2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$ o grupo diedral de ordem 80. Determine $[D_{40}, D_{40}]$.
   Sugestão: Considere o subgrupo $H = \langle a^2 \rangle$ e use a alínea (a).

3. Seja A um anel comutativo, $I \subset A$ um ideal e $S \subset A$ um subconjunto multiplicativo.
   (a) (2 val.) Mostre que $S^{-1}I = \{\frac{a}{s} \mid a \in I, s \in S\}$ é um ideal no anel $S^{-1}A$.
   (b) (1 val.) Seja $\pi\colon A \to A/I$ a projecção canónica. Mostre que $T = \pi(S)$ é um subconjunto multiplicativo do anel A/I.
   (c) (3 val.) Mostre que $S^{-1}A/S^{-1}I \cong T^{-1}(A/I)$ como anéis.

4. Considere o anel dos inteiros de Gauss $\mathbb{Z}[i]$ e a aplicação $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}_0$ dada por $N(a+bi) = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$. Pode usar, sem justificar, que $N(zw) = N(z)N(w)$ para todo o $z, w \in \mathbb{Z}[i]$.
   (a) (1,5 val.) Mostre que $z \in \mathbb{Z}[i]^\times$ se e só se $N(z) = 1$.
   (b) (2 val.) Seja p um primo em $\mathbb{N}$ tal que existem $a, b \in \mathbb{Z}$ com $p = a^2 + b^2$. Mostre que $a + bi$ e $a - bi$ são elementos primos em $\mathbb{Z}[i]$.
   (c) (1,5 val.) Justifique que, se $p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ onde $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ e p é um primo em $\mathbb{N}$, então $\{a, b\} = \{c, d\}$.