Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Fundamentos de Álgebra

LMAC e MMA

Teste 2 – 9 de Janeiro de 2014

Duração: 1h 30m

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Seja A um anel e considere a sucessão curta exacta em Mod_A:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0 \ . \qquad (*)$$

   (a) (2,5 val.) Mostre que, se K é um módulo livre, então a sucessão $(*)$ cinde-se.

   (b) (2,5 val.) Dê um exemplo de uma sucessão curta exacta $(*)$ com M livre que não se cinda. Sugestão: Considere $A = \mathbb{Z}$.

2. (2,5 val.) Seja M um grupo abeliano. Mostre que

$$(M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \oplus (M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_5) \cong M/(10 \cdot M) \ .$$

3. (2,5 val.) Seja A um anel comutativo e sejam P e Q módulos-A projectivos. Mostre que $P \otimes_A Q$ é um módulo projectivo.

4. Seja D um domínio integral e M um módulo-D.

   (a) (2 val.) Mostre que $\mathrm{Torc}(M) = \{v \in M \mid \exists\, a \in D \setminus \{0\} \text{ t.q. } av = 0\}$ é um módulo-D.

   (b) (2,5 val.) Mostre que, se $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, então $\mathrm{Torc}(M) = \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Torc}(M_i)$.

   (c) (2,5 val.) Mostre que, se M é um módulo livre, então M é livre de torção.

5. (3 val.) Usando diagonalização de matrizes em $M_3(\mathbb{C}[x])$, determine a forma canónica de Jordan da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C}) \ .$$