Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Fundamentos de Álgebra

LMAC e MMA

Teste 2 – 7 de Janeiro de 2016

Duração: 1h 30m

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Seja $A \neq \{0\}$ um anel comutativo e sejam M e N módulos-A. Em cada uma das seguintes alíneas, demonstre ou dê um contra-exemplo.

   (a) (2,5 val.) Se M é livre e $f\colon M \longrightarrow N$ é um isomorfismo de módulos-A, então N é livre.

   (b) (2,5 val.) Se M e N são livres, $\mathcal{B}$ é uma base de M e $f\colon M \longrightarrow N$ é um homomorfismo de módulos-A tal que $f(\mathcal{B})$ é uma base de N, então f é um isomorfismo.

   (c) (2,5 val.) Se M é livre então M é projectivo.

   (d) (2,5 val.) Se $M \otimes_A N$ é finitamente gerado, então M e N são finitamente gerados.

2. (2,5 val.) Sejam D um domínio integral, $K = \mathrm{Frac}(D)$ e M um módulo-D de torção. Mostre que $K \otimes_D M = \{0\}$.

3. Seja D um domínio integral. Pode usar, sem justificar, que para qualquer módulo-D M, $\mathrm{Tor}(M)$ é um submódulo de M.

   (a) (1 val.) Seja $f\colon M \longrightarrow N$ um homomorfismo de módulos-D. Mostre que $f(\mathrm{Tor}(M)) \subset \mathrm{Tor}(N)$.

   (b) (2,5 val.) Dada a sucessão curta exacta de módulos-D

   $$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0 \ ,$$

   mostre que

   $$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(M) \xrightarrow{f|_{\mathrm{Tor}(M)}} \mathrm{Tor}(N) \xrightarrow{g|_{\mathrm{Tor}(N)}} \mathrm{Tor}(P)$$

   é uma sucessão exacta.

   (c) (1 val.) Dê um exemplo de um domínio integral D, módulos-D N e P, e um homomorfismo sobrejectivo $g\colon N \longrightarrow P$ tal que $g(\mathrm{Tor}(N)) \neq \mathrm{Tor}(P)$.

4. (3 val.) Seja $V = \mathbb{R}^4$ o módulo-$\mathbb{R}[x]$ com o produto por escalares induzido por $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$, i.e., $x \cdot \mathbf{v} := T(\mathbf{v})$, onde $T(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_1, v_1 + v_2, -v_4, v_3)$ para $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V$. Determine a decomposição cíclica primária de V.