Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Exercícios Propostos

Teorema da Função Inversa. Teorema da Função Implícita

1 Para cada um dos casos seguintes determine o conjunto de pontos em que o Jacobiano de f é não nulo. Descreva o conjunto $f(S)$. Se f for injectiva, determine f^{-1} explicitamente.

a) $f(x,y) = (x+2y, x-y)\,, \quad S = \mathbb{R}^2.$

b) $f(x,y) = (x^2-y^2, xy)\,, \quad S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$

c) $f(x,y) = \left(\log xy, \dfrac{1}{(x^2+y^2)}\right)\,, \quad S = \{(x,y) : 0 < y < x\}.$

2 Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} u &= & xy + \operatorname{sen}(x+y) \\ v &= & e^{-x+y-2} + \frac{x}{y}. \end{cases}$$

Mostre que existe uma vizinhança de $(u,v) = (-1,0)$ e uma vizinhança de $(x,y) = (-1,1)$ em que o sistema define (x,y) como função, de classe C^1, de (u,v) e calcule $\dfrac{\partial x}{\partial u}(-1,0)$.

3 Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = (2xy, x^2-y^2)$.

a) Determine, justificadamente, o conjunto de pontos em que f tem inversa local.

b) Determine a matriz Jacobiana da função inversa f^{-1} no ponto $(2,0)$.

4 Mostre que a equação $x\cos(xy) = 0$ define, implicitamente, y como função de x em alguma vizinhança do ponto $(1, \frac{\pi}{2})$ e calcule a derivada $\frac{df}{dx}(1)$.

5 Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, x-y)$$

e o conjunto

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = (2,0)\}.$$

Use o teorema da função implícita para justificar que, numa vizinhança do ponto $(1,1,0)$, o conjunto C é o gráfico de uma função $f : I \to \mathbb{R}^2$, em que I é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$.

6 Mostre que existe uma vizinhança de $(u,v) = (0,0)$ onde o sistema

$$\begin{cases} x &= & u - v + \log(1+uv) \\ y &= & u + v - u^2v^2, \end{cases}$$

define u e v como funções de (x,y), de classe C^1, e calcule $\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,0)$.