Resumos de AMIII A

I. Variedades em $\mathbb{R}^n$

1. Revisões de Cálculo Diferencial

1. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$ uma função (portanto $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$), $\mathbf{x}_0 \in U$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ então a *derivada direccional* de $\mathbf{f}$ segundo $\mathbf{v}$ no ponto $\mathbf{x}_0$ é

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{d}{dt}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})|_{t=0} \ .$$

2. A i-ésima *derivada parcial* de $\mathbf{f}$ é

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} D_{\mathbf{e}_i}\mathbf{f} \ .$$

3. $\mathbf{f}$ diz-se *diferenciável* em $\mathbf{x}_0$ se existe uma transformação linear $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (representada por uma matriz $m \times n$) tal que

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0} \ .$$

4. Se $\mathbf{f}$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0$ então

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} \ .$$

Em particular, $D\mathbf{f}$ é representada na base canónica pela *matriz Jacobiana*

$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} .$$

5. $\mathbf{f}$ diz-se de classe C^1 se as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ são funções contínuas.
6. $\mathbf{f}$ $C^1 \Rightarrow \mathbf{f}$ diferenciável.
7. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então f diz-se um *campo escalar*, e

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

pode ser identificada com o vector

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

dito o *gradiente* de f.

8. Se $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0 \in U$, e $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável em $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, então $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0$ e

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \ .$$

Em coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e $(y_1, \ldots, y_m)$ em $\mathbb{R}^m$, tem-se

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$$

(*regra da cadeia*).

9. Derivadas parciais de ordem superior:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right).$$

f diz-se de classe C^2 se todas as derivadas parciais de segunda ordem são funções contínuas.

10. *Lema de Schwarz:* $f \ C^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

2. Função Inversa e Função Implícita

1. *Teorema da Função Inversa:* Seja $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e $\mathbf{x}_0 \in U$ tal que $\det D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Então $\mathbf{f}$ é *localmente* C^1*-invertível*, *i.e.*, existem vizinhanças V de $\mathbf{x}_0$ e W de $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tais que $\mathbf{f} : V \to W$ possui inversa C^1 $\mathbf{f}^{-1} : W \to V$. Além disso, $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = [D\mathbf{f}(\mathbf{x})]^{-1} \quad \forall \mathbf{x} \in V$.
2. *Teorema da Função Implícita:* Seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1 e $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ e $\det D_{\mathbf{y}} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$. Então existe uma vizinhança $U \times V$ de $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ e uma função de classe C^1 $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ tais que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad \forall_{(x,y) \in U \times V} \ .$$

3. Nas condições do Teorema da Função Implícita, a matriz derivada de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{x}_0$ pode ser calculada a partir de

$$D_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + D_{\mathbf{y}} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0 \ .$$

3. Variedades Diferenciáveis

1. Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma *variedade diferenciável de dimensão* $d \in \{0, \ldots, n\}$ (e classe C^q, $q \geq 1$) se para qualquer ponto $\mathbf{x}_0 \in M$ existe uma vizinhança U de $\mathbf{x}_0$ e uma função de classe C^q $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ tais que
   i. $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$;
   ii. a característica de $D\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é $n - d$ (i.e., é máxima) para todo o $\mathbf{x} \in U$.

2. Uma variedade de dimensão 0 é simplesmente um conjunto do pontos isolados; uma variedade de dimensão n é simplesmente um conjunto aberto.
3. $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão d (e classe C^q) *sse* para qualquer ponto $\mathbf{x}_0 \in M$ existe uma vizinhança U de $\mathbf{x}_0$ e uma função C^q $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n-d}$ tais que
$$M \cap U = \mathrm{Graf}(\mathbf{f}) \cap U \ .$$
4. Um vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ é um *vector tangente* à variedade M no ponto $\mathbf{x}_0$ se existe uma função $\mathbf{c} :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ tal que $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}_0$ e $\frac{d\mathbf{c}}{dt}(0) = \mathbf{v}$.
5. O conjunto $T_{\mathbf{x}_0}M$ de todos os vectores tangentes à variedade M em $\mathbf{x}_0$ é um espaço vectorial de dimensão d, dito o *espaço tangente* a M no ponto $\mathbf{x}_0$. O seu complemento ortogonal $T^{\perp}_{\mathbf{x}_0}M$ é um espaço vectorial de dimensão $n-d$, dito o *espaço normal* a M no ponto $\mathbf{x}_0$.
6. Se $M = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ numa vizinhança U de $\mathbf{x}_0$, então o conjunto $\{\nabla F_1(\mathbf{x}_0), \ldots, \nabla F_{n-d}(\mathbf{x}_0)\}$ é uma base para $T^{\perp}_{\mathbf{x}_0}M$. Portanto
$$T^{\perp}_{\mathbf{x}_0}M = \mathrm{span}\{\nabla F_1(\mathbf{x}_0), \ldots, \nabla F_{n-d}(\mathbf{x}_0)\} \ .$$
7. *Teorema dos Extremos Condicionados:* Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade d-dimensional. Se a restrição de f a M tem um extremo local em $\mathbf{x}_0 \in M$ então $\nabla f(\mathbf{x}_0) \in T^{\perp}_{\mathbf{x}_0}M$.
8. *Regra dos Multiplicadores de Lagrange:* Nas condições do teorema anterior, existem constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-d} \in \mathbb{R}$ (os *multiplicadores de Lagrange*) tais que
$$\nabla f(\mathbf{x}_0) + \lambda_1 \nabla F_1(\mathbf{x}_0) + \ldots + \lambda_{n-d} \nabla F_{n-d}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \ .$$

II. Integração em $\mathbb{R}^n$

1. Medida de Lebesgue

1. Um *intervalo limitado* $I \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto da forma $I = J_1 \times \ldots \times J_n$, onde cada J_k é um intervalo de extremos $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Define-se o *volume* (n-dimensional) de um intervalo limitado através de
$$\mathrm{vol}(I) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \ .$$
2. Uma família $\{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ diz-se uma *cobertura* de $A \subset \mathbb{R}^n$ se
$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i \ .$$
A cobertura diz-se *aberta* se todos os U_i são abertos.
3. Dado um subconjunto qualquer $A \subset \mathbb{R}^n$, define-se a sua *medida exterior* (n-dimensional) como sendo
$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{vol}(I_k) : I_k \text{ intervalo aberto limitado }, A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \right\}$$
(pode ser $+\infty$).

4. Propriedades da medida exterior:
   i. $\mu^*(\varnothing) = 0$;
   ii. $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
   iii. I intervalo limitado $\Rightarrow \mu^*(I) = \mathrm{vol}(I)$;
   iv. $\mu^*(\mathbf{a} + A) = \mu^*(A)\ \forall_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n}$;
   v. $A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A_k)$.
5. A *diferença simétrica* entre dois conjuntos A e B é

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\ .$$

6. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se *mensurável (à Lebesgue)* se

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{I_1, I_2, \ldots \text{ intervalos abertos limitados}} : \mu^*(A \Delta U) < \varepsilon, \quad \text{onde } U = \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k\ .$$

   Se A é mensurável, define-se a sua *medida* (n-dimensional) como $\mu(A) = \mu^*(A)$ (pode ser $+\infty$).
7. Propriedades dos conjuntos mensuráveis e da medida de Lebesgue:
   i. $\varnothing$ é mensurável;
   ii. A mensurável $\Rightarrow A^c \equiv \mathbb{R}^n \setminus A$ mensurável;
   iii. A, B mensuráveis $\Rightarrow A \cup B$ mensurável;
   iv. $A_1, A_2, \ldots$ mensuráveis $\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ mensurável;
   v. Se $A_1, A_2, \ldots$ são mensuráveis e disjuntos 2 a 2 então

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)\ .$$

8. Qualquer conjunto aberto/fechado é mensurável.
9. Qualquer conjunto de medida exterior nula é mensurável.
10. $A \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula sse

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{I_1, I_2, \ldots \text{ intervalos abertos limitados}} : A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \ \text{ e } \ \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{vol}(I_k) < \varepsilon\ .$$

11. Propriedades dos conjuntos de medida nula:
   i. $A \subset B, \mu(B) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$;
   ii. Qualquer conjunto numerável tem medida nula;
   iii. $A_1, A_2, \ldots$ com medida nula $\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ tem medida nula;
   iv. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua, então o gráfico de f,

$$\mathrm{Graf}(f) = \left\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\right\}\ ,$$

   tem medida nula em $\mathbb{R}^{n+1}$.

12. Se $P(\mathbf{x})$ é uma proposição que depende de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dizemos que $P(\mathbf{x})$ é *verdadeira quase em toda a parte* (q.t.p.) se

$$\mu\left(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : P(\mathbf{x}) \text{ é falsa } \}\right) = 0 \ .$$

13. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se *mensurável* se $f^{-1}(]c, +\infty[)$ é um conjunto mensurável para todo o $c \in \mathbb{R}$.
14. $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua *sse* para qualquer aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ a imagem inversa $\mathbf{f}^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto.
15. Qualquer função contínua é mensurável.
16. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar, define-se

$$f^+(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } f(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases} , \qquad f^-(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(\mathbf{x}) \geq 0 \\ -f(\mathbf{x}) & \text{se } f(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}$$

(note-se que $f^+, f^- \geq 0, f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$).

17. i. f mensurável $\Rightarrow f^+, f^-, |f|$ mensuráveis.
    ii. f, g mensuráveis $\Rightarrow \max(f, g), \min(f, g), f \pm g, fg$ mensuráveis.
    iii. $f_1, f_2, \ldots$ mensuráveis e $f(\mathbf{x}) = \lim_{k\to+\infty} f_k(\mathbf{x})$ existe $\Rightarrow f$ mensurável.
18. Se $A \subset \mathbb{R}^n$, a *função característica* de A é a função $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\chi_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in A \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin A \end{cases} .$$

19. A função $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se *simples* se a sua imagem é um conjunto finito. Portanto, s é simples se existem conjuntos disjuntos $A_1, \ldots, A_N \subset \mathbb{R}^n$ e números reais $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$ tais que

$$s = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{A_i} \ .$$

s é mensurável *sse* $A_1, \ldots, A_N$ são conjuntos mensuráveis.

20. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar, existe uma sucessão $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de funções simples tais que

$$\lim_{k\to+\infty} s_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \ \forall_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \ .$$

Além disso:
    i. Se f é mensurável, as funções s_k podem ser escolhidas mensuráveis;
    ii. Se $f \geq 0$, podemos escolher $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ monótona crescente:

$$0 \leq s_1(\mathbf{x}) \leq s_2(\mathbf{x}) \leq \ldots, \ \forall_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \ .$$

2. Integral de Lebesgue

1. Se $s : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ é simples e mensurável,

$$s = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{A_i} \qquad c_i \in \mathbb{R}^+, A_i \subset \mathbb{R}^n \text{ mensurável,}$$

define-se o seu *integral* como sendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(A_i)$$

(pode ser $+\infty$).

2. Se $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ é mensurável, define-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s : 0 \leq s \leq f \text{ é simples e mensurável } \right\}$$

(pode ser $+\infty$). Se

$$\int_{\mathbb{R}^n} f < +\infty$$

a função f diz-se *integrável.*

3. Uma função mensurável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se *integrável* se f^+, f^- o são. Nesse caso, define-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ - \int_{\mathbb{R}^n} f^-.$$

4. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto mensurável, f diz-se *integrável em* A se $f\chi_A$ é integrável, caso em que se define

$$\int_A f = \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_A \ .$$

O conjunto das funções integráveis em A designa-se por $L^1(A)$.

5. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável. Então:
   i. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é mensurável e limitada e $\mu(A) < +\infty$ então $f \in L^1(A)$.
   ii. Se $f, g \in L^1(A)$ e $f \leq g$ então

   $$\int_A f \leq \int_A g \ .$$

   iii. Se $\mu(A) = 0$ então $\int_A f = 0$.
   iv. Se $a, b \in \mathbb{R}$ e f, g $L^1(A)$ então $af + bg \in L^1(A)$ e

   $$\int_A (af + bg) = a \int_A f + b \int_A g \ .$$

   v. $f \in L^1(A)$ *sse* $|f| \in L^1(A)$, e

   $$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f| \ .$$

   vi. Se $f \in L^1(A)$ e $g = f$ q.t.p. em A, então $g \in L^1(A)$ e

   $$\int_A g = \int_A f \ .$$

6. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável então $f \in L^1([a,b])$ e

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ .$$

3. Teoremas de Fubini e de Tonelli, Mudança de Variáveis e Aplicações

1. *Teorema de Fubini:* Se $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ são mensuráveis e $f \in L^1(A \times B)$ então:
   i. A função $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in L^1(A)$ para quase todo o $\mathbf{y} \in B$;
   ii. A função $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in L^1(B)$ para quase todo o $\mathbf{y} \in A$;
   iii. A função $\mathbf{y} \mapsto \int_A f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{x} \in L^1(B)$;
   iv. A função $\mathbf{x} \mapsto \int_B f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \in L^1(A)$;
   v.
   $$\int_{A\times B} f = \int_A \left(\int_B f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \right) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_B \left(\int_A f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{x} \right) \mathrm{d}\mathbf{y} \ .$$
2. *Teorema de Tonelli:* Se $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ são mensuráveis e $f : A \times B \to \mathbb{R}$ é mensurável, e se um dos integrais iterados

   $$\int_A \left(\int_B |f(\mathbf{x},\mathbf{y})|\mathrm{d}\mathbf{y} \right) \mathrm{d}\mathbf{x} \qquad \text{ou} \qquad \int_B \left(\int_A |f(\mathbf{x},\mathbf{y})|\mathrm{d}\mathbf{x} \right) \mathrm{d}\mathbf{y}$$

   existe, então $f \in L^1(A \times B)$.
3. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável e limitado e é dada uma *função densidade de massa* $\sigma \in L^1(A)$, define-se:
   i. O *volume* n-dimensional de A:
   $$V = \mu(A) = \int_A 1 \ .$$
   ii. A *massa* de A:
   $$M = \int_A \sigma \ .$$
   iii. A coordenada k do *centro de massa* de A:
   $$x_{k,CM} = \frac{1}{M} \int_A x_k \sigma \ .$$
   iv. A coordenada k do *centróide* de A:
   $$\bar{x}_k = \frac{1}{V} \int_A x_k \ .$$
   v. O *momento de inércia* de A em relação a um determinado eixo L:
   $$I_L = \int_A d^2 \sigma \ ,$$
   onde $d(\mathbf{x})$ é a distância do ponto $\mathbf{x}$ ao eixo L.
4. Seja $T \subset \mathbb{R}^n$ aberto; $\mathbf{g} : T \to \mathbb{R}^n$ diz-se uma *mudança de coordenadas* se

   i. $\mathbf{g}$ é C^1, ii. $\mathbf{g}$ é injectiva, iii. $\det D\mathbf{g}(\mathbf{t}) \neq 0 \ \forall_{\mathbf{t}\in T}$

   (em particular, $\mathbf{g}$ tem inversa C^1).

5. *Teorema de Mudança de Variáveis:* Se $\mathbf{g} : T \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma mudança de coordenadas e $f \in L^1(A)$, onde $A \subset \mathbf{g}(T)$, então $f \circ \mathbf{g} \in L^1(\mathbf{g}^{-1}(A))$ e

$$\int_A f(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbf{g}^{-1}(A)} f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \left|\det D\mathbf{g}(\mathbf{t})\right| \mathrm{d}\mathbf{t} \ .$$

6. *Coordenadas Polares* em $\mathbb{R}^2$: São as coordenadas $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x, y) mediante a mudança de coordenadas

$$(x, y) = \mathbf{g}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta) \ .$$

Verifica-se a seguinte igualdade

$$|\det D\mathbf{g}(r, \theta)| = r \ .$$

7. *Coordenadas Cilíndricas* em $\mathbb{R}^3$: São as coordenadas $(r, \theta, z) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times\mathbb{R}$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x, y, z) mediante a mudança de coordenadas

$$(x, y, z) = \mathbf{g}(r, \theta, z) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, z) \ .$$

Verifica-se a seguinte igualdade

$$|\det D\mathbf{g}(r, \theta, z)| = r \ .$$

8. *Coordenadas Esféricas* em $\mathbb{R}^3$: São as coordenadas $(\rho, \theta, \varphi) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x, y, z) mediante a mudança de coordenadas

$$(x, y, z) = \mathbf{g}(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\varphi) \ .$$

Verifica-se a seguinte igualdade

$$|\det D\mathbf{g}(\rho, \theta, \varphi)| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \ .$$

III. Formas Diferenciais

1. Tensores e Covectores

1. O *dual* de $\mathbb{R}^n$ é

$$(\mathbb{R}^n)^* = \{\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \omega \text{ é linear}\}.$$

Os elementos de $(\mathbb{R}^n)^*$ dizem-se *covectores-1*.

2. $(\mathbb{R}^n)^*$ é um espaço vectorial de dimensão n. Uma base para $(\mathbb{R}^n)^*$ é

$$\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$$

onde o covector-1 e_i^* é definido por

$$e_i^* \left(v_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + v_n \mathbf{e}_n\right) = v_i$$

(ou seja, $e_i^* \left(\mathbf{e}_j\right) = 1$ se $i = j$ e $e_i^* \left(\mathbf{e}_j\right) = 0$ caso contrário).

3. Um *tensor-k* (covariante) é uma aplicação $T : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ multilinear, i.e., tal que

$$T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) = T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) + T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_k);$$
$$T(\mathbf{v}_1, \ldots, \lambda\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) = \lambda T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k)$$

$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n)$. $T^k(\mathbb{R}^n)$ designa o conjunto de todos os tensores-k em $\mathbb{R}^n$.
4. Um tensor-k $\omega \in T^k(\mathbb{R}^n)$ diz-se *alternante*, ou um *covector-k*, se

$$\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_k) = -\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k)$$

$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$, $i, j = 1, \ldots, n)$. $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ designa o conjunto de todos os covectores-k em $\mathbb{R}^n$.
5. $T^k(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vectorial e $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço vectorial de $T^k(\mathbb{R}^n)$.
6. Se $S \in T^k(\mathbb{R}^n)$ e $T \in T^l(\mathbb{R}^n)$, o seu *produto tensorial* $S \otimes T \in T^{k+l}(\mathbb{R}^n)$ é dado por

$$S \otimes T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l) = S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)\, T(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l)$$

$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l \in \mathbb{R}^n)$.
7. *Propriedades do produto tensorial:* Se R, S, T, U são tensores em $\mathbb{R}^n$ de graus apropriados e $\lambda \in \mathbb{R}$ então:
   i. $(S + R) \otimes T = S \otimes U + R \otimes T$;
   ii. $S \otimes (T + U) = S \otimes T + S \otimes U$;
   iii. $(\lambda S) \otimes T = \lambda(S \otimes T) = S \otimes (\lambda T)$;
   iv. $S \otimes (T \otimes U) = (S \otimes T) \otimes U$;
   v. $S \otimes T \neq T \otimes S$.
8. $\dim\left(T^k(\mathbb{R}^n)\right) = n^k$, e uma base é $\left\{e^*_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{i_k}\right\}_{i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n}$.
9. Se $T \in T^k(\mathbb{R}^n)$, define-se

$$\mathrm{Alt}(T)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \mathrm{sgn}(\sigma) T\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(k)}\right) .$$

10. *Propriedades de* Alt*:*
    i. Se $T \in T^k(\mathbb{R}^n)$, então $\mathrm{Alt}(T) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$;
    ii. $\mathrm{Alt} : T^k(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ é linear;
    iii. Se $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, então $\mathrm{Alt}(\omega) = \omega$.

    (Por outras palavras, $\mathrm{Alt} : T^k(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ é uma projecção).
11. Se ω é um covector-k e η é um covector-l, o seu *produto exterior* é o covector-(k+l)

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!\ l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta) .$$

12. *Propriedades do produto exterior:* Se ω, η, α e β são covectores de graus apropriados então
    i. $\omega \wedge (\alpha + \beta) = \omega \wedge \alpha + \omega \wedge \beta$;
    ii. $\omega \wedge (c\alpha) = c(\omega \wedge \alpha)$ com $c \in \mathbb{R}$;

iii. $\omega \wedge \alpha = (-1)^{kl} \alpha \wedge \omega$ para $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$;

iv. $\omega \wedge (\alpha \wedge \eta) = (\omega \wedge \alpha) \wedge \eta$.

13. $e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^* = k!\,\mathrm{Alt}\left(e_{i_1}^* \otimes \ldots \otimes e_{i_k}^*\right)$, portanto $e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_1)$ é igual ao determinante da matriz $k \times k$ que se obtém escolhendo as linhas $i_1, \ldots, i_k$ da matriz $\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_k \\ | & & | \end{bmatrix}$, onde $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$.

14. $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, e uma base é $\left\{e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$.

2. Formas diferenciais

1. Uma *forma-k diferencial* C^q em $\mathbb{R}^n$ é uma função C^q $\omega : \mathbb{R}^n \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ (i.e., $\omega(\mathbf{x}) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$). O conjunto das formas-k C^∞ em $\mathbb{R}^n$ designa-se por $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$.

2. Se $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ é uma forma-k,

$$\omega = \sum_{0 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

a sua *derivada exterior* é a forma-(k+1)

$$d\omega = \sum_{0 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

3. *Propriedades da derivada exterior:* Se ω, α e η são formas de graus apropriados então

i. $d(\omega + \alpha) = d\omega + d\alpha$;

ii. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$, onde $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$;

iii. $d(d\omega) = 0$ (abreviadamente, $d^2 = 0$);

4. Se $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é C^∞ e $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ então o *pull-back* de ω por $\mathbf{f}$ é a forma-k $\mathbf{f}^*\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ definida por

$$\mathbf{f}^*\omega(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \omega(\mathbf{f}(\mathbf{x}))(D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_1, \ldots, D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_k)$$

para $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^m$.

5. *Propriedades do pull-back:* Se ω, α e η são formas de graus apropriados então

i. $\mathbf{f}^*(\omega + \alpha) = \mathbf{f}^*\omega + \mathbf{f}^*\alpha$;

ii. $\mathbf{f}^*(\omega \wedge \eta) = \mathbf{f}^*\omega \wedge \mathbf{f}^*\eta$.

iii. $d(\mathbf{f}^*\omega) = \mathbf{f}^*(d\omega)$.

6. Por definição, $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ e portanto as formas-0 $\Omega^0(\mathbb{R}^n)$ são as funções C^∞ $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se ω é uma forma-k e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é C^∞ tem-se

i. $g \wedge \omega = g\omega$;

ii. $\mathbf{f}^*g = g \circ \mathbf{f}$;

iii. $dg = \dfrac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial g}{\partial x_n} dx_n$.

(em particular, $d(x_i) = dx_i$, o que justifica esta notação).

7. $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ diz-se *fechada* se $d\omega = 0$.

8. $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ diz-se *exacta* se existe uma forma $\eta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\omega = d\eta$ (η diz-se um *potencial* para ω).

9. ω exacta $\Rightarrow$ ω fechada.
10. $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se *em estrela* se existe um ponto $\mathbf{x}_0 \in A$ (dito o *centro*) tal que $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] \subset A$ para todo o $\mathbf{x} \in A$, onde

$$[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] = \{\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) : t \in [0, 1]\}$$

designa o segmento de recta de extremos $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}$.
11. *Lema de Poincaré:* Seja $\omega \in \Omega^k(U)$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Se U é em estrela e ω é fechada, então ω é exacta.

IV. Integração em Variedades

1. Parametrizações, Cartas e Orientabilidade

1. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão k, $\mathbf{x} \in M$ e U uma vizinhança aberta de $\mathbf{x}$. $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^k \to M \cap U$ diz-se uma *parametrização* de classe C^q de $M \cap U$ se é uma bijecção de classe C^q com $\mathbf{g}^{-1} : M \cap U \to V$ contínua e $\operatorname{rank} D\mathbf{g} = k$.
2. Se $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^k \to M \cap U$ é uma parametrização, a função contínua $\mathbf{g}^{-1} : M \cap U \to V$ diz-se uma *carta local*.
3. $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão k e classe C^q *sse* para todo o $\mathbf{x} \in M$ existe uma vizinhança aberta U de $\mathbf{x}$ e uma parametrização de classe C^q $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^k \to M \cap U$. Além disso, as colunas de $D\mathbf{g}(\mathbf{t})$ formam uma base para $T_{\mathbf{g}(\mathbf{t})}M$.
4. Sejam $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^k \to M \cap U$ e $\mathbf{h} : W \subset \mathbb{R}^k \to M \cap U$ duas parametrizações, e $\varphi : M \cap U \to V$ e $\psi : M \cap U \to W$ as respectivas cartas locais. Então a mudança de carta local $\psi \circ \mathbf{g} : V \to W$ é de classe C^q e $\det D\psi \circ \mathbf{g} \neq 0$.
5. Diz-se que um covector-k $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ *orienta* o subespaço $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão k se existe uma base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ para V tal que

$$\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \neq 0 \ .$$

Diz-se que a base é *positivamente orientada* se $\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) > 0$, e *negativamente orientada* se $\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) < 0$. Se ω orienta V e $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ é outra base qualquer para V, então

$$\omega(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k) = (\det S)\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \neq 0 \ ,$$

onde S é a matriz de mudança de base (portanto duas bases têm a mesma orientação *sse* o determinante da matriz de mudança de base é positivo). Diz-se que dois covectores induzem a mesma orientação se as respectivas bases positivamente orientadas coincidem (portanto existem exactamente *duas* orientações para um subespaço $V \subset \mathbb{R}^n$ induzidas por ω e $-\omega$).
6. Diz-se que uma variedade-k $M \subset \mathbb{R}^n$ é *orientável* se existe uma forma-k $\mu \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ que orienta todos os espaços tangentes $T_\mathbf{x}M$, $\mathbf{x} \in M$. Diz-se que uma parametrização $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^k \to M \cap U$ é compatível com μ se a base $\left\{\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_k}\right\}$ para $T_{\mathbf{g}(\mathbf{t})}M$ é positivamente orientada para todo o $\mathbf{t} \in V$.
7. Uma variedade-k $M \subset \mathbb{R}^n$ é orientável *sse* existe $\mu \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathbf{g}^*\mu(\mathbf{t}) \neq 0$ para todo o $\mathbf{t} \in V$ e toda a parametrização $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^k \to M \cap U$. Uma parametrização $\mathbf{g}$ é compatível com a orientação induzida por μ *sse* $\mathbf{g}^*\mu = h dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k$ com $h > 0$.

8. Dado um campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞, define-se $\omega_{\mathbf{F}} \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ e $\Omega_{\mathbf{F}} \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ através das fórmulas

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{F}} =& F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n \ ; \\ \Omega_{\mathbf{F}} =& F_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n - \cdots + (-1)^{n-1} F_n dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \ .\end{aligned}$$

9. A imagem de qualquer parametrização é orientável: se $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^k \to M \cap U$ é uma parametrização, então

$$\mathbf{g}^* \left(\omega_{D_1\mathbf{g}} \wedge \cdots \wedge \omega_{D_k\mathbf{g}}\right) = (\det G) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k \ ,$$

onde $D_i\mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_i}$ e G é a matriz $k \times k$ de entradas $g_{ij} = D_i\mathbf{g} \cdot D_j\mathbf{g}$.

10. i. Qualquer variedade-1 $M \subset \mathbb{R}^n$ é orientável: se $\boldsymbol{\tau} : M \to \mathbb{R}^n$ é um vector tangente unitário contínuo, então $\omega_{\boldsymbol{\tau}}$ induz uma orientação em M. Uma parametrização $\mathbf{g}$ é compatível com esta orientação *sse*

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt} > 0 \ .$$

ii. Uma variedade-$(n-1)$ $M \subset \mathbb{R}^n$ é orientável *sse* possui um vector normal unitário contínuo $\mathbf{n} : M \to \mathbb{R}^n$, caso em que $\Omega_{\mathbf{n}}$ induz uma orientação em M. Uma parametrização $\mathbf{g}$ é compatível com esta orientação sse

$$\det\left(\mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_{n-1}}\right) > 0 \ .$$

Se $n = 3$, esta condição também se pode escrever na forma:

$$\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_2}\right) > 0 \ .$$

2. Integrais de Formas Diferenciais

1. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-k orientável com orientação induzida por $\mu \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, e seja $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$. Seja $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^k \to M \cap U$ uma parametrização e $f, h : V \to \mathbb{R}$ tais que $\mathbf{g}^*\omega = f dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k$ e $\mathbf{g}^*\mu = h dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k$. Se f é integrável em V define-se o integral de ω ao longo de $M \cap U$ com a orientação induzida por μ através de

$$\int_{M \cap U^\mu} \omega = \operatorname{sgn}(h) \int_V f(\mathbf{t}) dt_1 \ldots dt_k \ .$$

Resulta desta definição que

$$\int_{V^+} f dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k = \int_V f(\mathbf{t}) dt_1 \ldots dt_k \ ,$$

onde $+$ é a orientacão em V induzida por $dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k$, e portanto

$$\int_{M \cap U^\mu} \omega = \operatorname{sgn}(h) \int_{V^+} \mathbf{g}^*\omega \ .$$

(Note que $\operatorname{sgn}(h) = 1$ se $\mathbf{g}$ é compatível com μ, e $\operatorname{sgn}(h) = -1$ caso contrário.)

2. A forma-k $dV_k \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ diz-se um *elemento de volume* para a variedade $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão k se

$$|dV_k(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)| = \mathrm{vol}_k(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \sqrt{\det G}$$

para quaisquer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in T_{\mathbf{x}}M$ e $\mathbf{x} \in M$, onde G é a matriz $k \times k$ dada por $g_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$. Em particular, $dV_n = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ é um elemento de volume em $\mathbb{R}^n$.

3. Se $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^k \to M \cap U$ é uma parametrização e $dV_k \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ é um elemento de volume para M, então

$$\mathbf{g}^* dV_k = \pm\sqrt{\det G}\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k$$

onde G é a matriz $k \times k$ de entradas $g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_j}$, i.e. $G = D\mathbf{g}^T D\mathbf{g}$. A parametrização $\mathbf{g}$ diz-se *compatível* com o elelmento de volume dV_k se o sinal acima é positivo.

4. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar, $dV_k \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ é um elemento de volume para M e $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^k \to M \cap U$ é uma parametrização compatível com dV_k, define-se o integral de f ao longo de $M \cap U$ como

$$\begin{aligned}\int_{M \cap U} f\, dV_k &= \int_V \mathbf{g}^*(f\, dV_k) = \int_V f \circ \mathbf{g} \sqrt{\det D\mathbf{g}^T D\mathbf{g}}\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k \\ &= \int_V f \circ \mathbf{g} \sqrt{\det D\mathbf{g}^T D\mathbf{g}}\, dt_1 \ldots dt_k \ ,\end{aligned}$$

se o integral existir. (Note-se que este integral é independente da orientação induzida por dV_k.)

5. i. Se M é uma variedade-1 e $\mathbf{g}$ é uma parametrização compatível com o elemento de volume dV_1, então

$$\mathbf{g}^* dV_1 = \left\| \frac{d\mathbf{g}}{dt} \right\| dt \ .$$

   ii. Se $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma variedade-2 orientável e $\mathbf{g}$ é uma parametrização compatível com o elemento de volume dV_2, então

$$\mathbf{g}^* dV_2 = \left\| \frac{d\mathbf{g}}{dt_1} \times \frac{d\mathbf{g}}{dt_2} \right\| dt_1 \wedge dt_2 \ .$$

6. *Independência da parametrização:* Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-k orientável, com orientação induzida por $\mu \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, se $\mathbf{g} : V \to M \cap U$ e $\mathbf{h} : W \to M \cap U$ são duas parametrizações compatíveis com μ, então

$$\int_V \mathbf{g}^* \omega = \int_W \mathbf{h}^* \omega \ , \qquad \forall\ \omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n) \ .$$

   Portanto, a definição de $\displaystyle\int_{M \cap U^\mu} \omega$ não depende da parametrização.

7. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão 1 e $\boldsymbol{\tau} : M \to \mathbb{R}^n$ é um vector normal unitário contínuo, então $dV_1 = \omega_{\boldsymbol{\tau}}$ é um elemento de volume para M.

8. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão 1, $\boldsymbol{\tau} : M \to \mathbb{R}^n$ é um vector tangente unitário e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial C^∞, define-se o *integral de linha* ou *trabalho* de $\mathbf{F}$ ao longo de M na direcção determinada por $\boldsymbol{\tau}$ por

$$\int_{M^+} \omega_{\mathbf{F}} = \int_M \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dV_1 \ ,$$

   onde $+$ é a orientação de M induzida por $dV_1 = \omega_{\boldsymbol{\tau}}$.

9. Se $\mathbf{g} :]a,b[\to M$ é uma parametrização da variedade-1 M compatível com a orientação induzida por $dV_1 = \omega_{\boldsymbol{\tau}}$, então o integral de linha do campo vectorial $\mathbf{F}$ é dado por:

$$\int_M \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dV_1 = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t)\mathrm{d}t \ .$$

(Note que $\mathbf{g}$ é compatível com a orientação induzida por $\omega_{\boldsymbol{\tau}}$ se $\frac{d\mathbf{g}}{dt}$ tem o sentido do vector tangente $\boldsymbol{\tau}$.)

10. *Notação:* É habitual denotar o trabalho do campo vectorial $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ao longo da variedade-1 M por $\displaystyle\int_M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}$.

11. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão $n-1$ orientável e $\mathbf{n} : M \to \mathbb{R}^n$ um vector normal unitário contínuo, então $dV_{n-1} = \Omega_{\mathbf{n}}$ é um elemento de volume para M.

12. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão $n-1$ orientável, $\mathbf{n} : M \to \mathbb{R}^n$ é um vector normal unitário e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial C^∞, define-se o *fluxo* de $\mathbf{F}$ através de M na direcção determinada por $\mathbf{n}$ por

$$\int_{M^+} \Omega_{\mathbf{F}} = \int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_{n-1} \ ,$$

onde $+$ é a orientação de M definida por $dV_{n-1} = \Omega_{\mathbf{n}}$.

13. Se $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \mathbb{R}^3$ é uma parametrização compatível com o elemento de volume $dV_2 = \Omega_{\mathbf{n}}$, então o fluxo do campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ através de M na direcção da normal unitária $\mathbf{n}$ é dado por:

$$\int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 = \int_V \mathbf{F}\left(\mathbf{g}\left(t_1, t_2\right)\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_2}\right) dt_1 dt_2 \ .$$

(Note que $\mathbf{g}$ é compatível com a orientação induzida por $\Omega_{\mathbf{n}}$ se $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_2}$ tem o sentido da normal $\mathbf{n}$.)

3. Teoremas Fundamentais do Cálculo para Integrais em Variedades

1. $M \subset \mathbb{R}^n$ diz-se uma *variedade com bordo* de dimensão k (e classe C^q) se $M = \overset{\circ}{M} \cup \partial M$, onde $\overset{\circ}{M}$ é uma variedade-k (e classe C^q), ∂M é uma variedade-$(k-1)$ (e classe C^q), dita o *bordo* de M, tal que para todo o $\mathbf{x} \in \partial M$ existe um aberto U contendo $\mathbf{x}$ e uma aplicação $\mathbf{g} : V \cap \{t_1 \leq 0\} \to M \cap U$ de classe C^q que satisfaz:
   i. $\mathbf{g}(V \cap \{t_1 < 0\}) = \overset{\circ}{M} \cap U$ e $\mathbf{g}(V \cap \{t_1 = 0\}) = \partial M \cap U$,
   ii. $\mathbf{g}$ é bijectiva, $\mathbf{g}^{-1}$ é contínua e a características de $D\mathbf{g}$ é máxima.

   M diz-se orientável se $\overset{\circ}{M}$ é orientável, e se $\omega \in \Omega^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ define-se

$$\int_M \omega = \int_{\overset{\circ}{M}} \omega \ .$$

   Se $\mu \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ induz uma orientação em $\overset{\circ}{M}$, então a forma $\nu \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\nu(\mathbf{x})(\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) = \mu(\mathbf{x})(\mathbf{n}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) \ , \quad \forall\ \mathbf{x} \in \partial M \quad \forall\ \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in T_{\mathbf{x}}\partial M,$$

   onde $\mathbf{n} \in T_{\mathbf{x}}M$ é o vector normal unitário e exterior a ∂M, define uma orientação em ∂M dita a *orientação induzida por* M.

2. *Teorema de Stokes (Teorema Fundamental do Cálculo):* Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade com bordo compacta orientável de dimensão k e $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ então

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \ ,$$

onde ∂M tem a orientação induzida pela de M.

3. Se M é uma variedade-k compacta, orientável, sem bordo (i.e. $\partial M = \varnothing$) e $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_M d\omega = 0 \ .$$

4. Casos particulares do Teorema de Stokes:

   i. *Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha:* Se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar de classe C^1 e $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão 1 com bordo, parametrizada por $\mathbf{g} : [a,b] \to M$, com $\mathbf{g}(a) = \mathbf{A}$ e $\mathbf{g}(b) = \mathbf{B}$, então

   $$\int_M \nabla\varphi \cdot d\mathbf{g} = \varphi(\mathbf{B}) - \varphi(\mathbf{A}) \ .$$

   ii. Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial de classe C^1, a sua *divergência* é o campo escalar

   $$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \ .$$

   iii. *Teorema da Divergência:* Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial de classe C^1 e M é uma variedade com bordo de dimensão n (i.e., um conjunto compacto $M \subset \mathbb{R}^n$ cuja fronteira é uma variedade), então

   $$\int_M \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV_n = \int_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_{n-1} \ ,$$

   onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior.

   iv. *Teorema de Green:* Se $M \subset \mathbb{R}^2$ é uma variedade com bordo de dimensão 2, e se P e Q são campos escalares de classe C^1, então

   $$\int_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial M} Pdx + Qdy \ ,$$

   onde o bordo ∂M é percorrido no sentido em que M fica do lado esquerdo.

   v. Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial de classe C^1, o seu *rotacional* é o campo vectorial

   $$\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

   vi. *Teorema de Stokes para Campos Vectoriais:* Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial de classe C^1 e M é uma superfície com bordo orientável, então

   $$\int_M (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = \int_{\partial M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} \ ,$$

   onde a normal unitária $\mathbf{n}$ a M e a paramatrização $\mathbf{g}$ de ∂M satisfazem a regra da mão direita.

4. Homotopia

1. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que dois caminhos fechados $\mathbf{g}, \mathbf{h} : [a,b] \to D$ são *homotópicos* em D se existe uma função contínua $\mathbf{H} : [a,b] \times [0,1] \to D$ (dita uma *homotopia* entre $\mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$) tal que
   i. $\mathbf{H}(s,0) = \mathbf{g}(s)$ e $\mathbf{H}(s,1) = \mathbf{h}(s),\ \forall\ s \in [a,b]$;
   ii. $\mathbf{H}(a,t) = \mathbf{H}(b,t),\ \forall\ t \in [0,1]$.
2. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e seja $\omega \in \Omega^1(D)$ uma forma fechada. Se $M, N \subset D$ são duas varieadades-1 compactas com parametrizações $\mathbf{g}, \mathbf{h} : [a,b] \to D$ homotópicas em D, então
$$\int_M \omega = \int_N \omega$$
com as orientações induzidas pelas parametrizações, i.e.
$$\int_a^b \mathbf{g}^*\omega = \int_a^b \mathbf{h}^*\omega \ .$$
3. i. Diz-se que $D \subset \mathbb{R}^n$ é *conexo por arcos* se, dados quaisquer dois pontos $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in D$, existe um caminho $\mathbf{g} : [a,b] \to D$ tal que $\mathbf{g}(a) = \mathbf{A}$ e $\mathbf{g}(b) = \mathbf{B}$.
   ii. Diz-se que $D \subset \mathbb{R}^n$ é *simplesmente conexo* se D é conexo por arcos e qualquer caminho fechado $\mathbf{g} : [a,b] \to D$ é homotópico a um caminho constante.
4. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, conexo por arcos, e seja $\omega \in \Omega^1(D)$. Então ω é exacta *sse*
$$\int_M \omega = 0 \ .$$
para toda a variedade-1 compacta $M \subset D$.
5. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto simplesmente conexo e $\omega \in \Omega^1(D)$. Então ω é exacta *sse* ω é fechada.

V. Integração em $\mathbb{R}^n$ (conclusão)

1. Teoremas de Convergência

1. Sejam $A_1, A_2, \ldots$ mensuráveis com $A_i \cap A_j = \varnothing$ se $i \neq j$, $A = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ e $f \geq 0$ mensurável. Então
$$\int_A f = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} f \ .$$
2. Sejam $A_1, A_2, \ldots$ mensuráveis com $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $A = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ e $f \geq 0$ mensurável. Então
$$\int_A f = \lim_{k \to +\infty} \int_{A_k} f \ .$$
3. $\dfrac{1}{x^\alpha} \in L^1([1,+\infty[)$ *sse* $\alpha > 1$.
4. $\dfrac{1}{x^\alpha} \in L^1(]0,1])$ *sse* $\alpha < 1$.

5. $\mathrm{e}^{-|x|} \in L^1(\mathbb{R})$.
6. $\mathrm{e}^{-x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.
7. *Teorema da Convergência Monótona de Levi:* Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em A tais que

$$0 \leq f_1(\mathbf{x}) \leq f_2(\mathbf{x}) \leq \ldots \quad \forall_{\mathbf{x}\in A} .$$

Se $f : A \to \mathbb{R}$ é tal que

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall_{\mathbf{x}\in A} ,$$

então

$$\int_A f = \lim_{k\to+\infty} \int_A f_k$$

(pode ser $+\infty$).
8. *Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue:* Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em A. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é tal que

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall_{\mathbf{x}\in A}$$

e existe $g \in L^1(A)$ tal que

$$|f_k(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x}) \quad \forall_{\mathbf{x}\in A} ,$$

então $f \in L^1(A)$ e

$$\int_A f = \lim_{k\to+\infty} \int_A f_k .$$

9. *Regra de Leibniz:* Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ mensurável e $f : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{x}, t)$ é integrável em $\mathbf{x}$ para todo o $t \in \mathbb{R}$ e diferenciável em t para quase todo o $\mathbf{x} \in A$. Se existe $g \in L^1(A)$ tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\right| \leq g(\mathbf{x})$$

para t numa vizinhança de $t_0 \in \mathbb{R}$, então a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(t) = \int_A f(\mathbf{x}, t)\mathrm{d}\mathbf{x}$$

é diferenciável em t_0 e

$$F'(t_0) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t_0)\mathrm{d}\mathbf{x} .$$