Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Computacional (Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação)

2º **Teste: 3 de Julho de 2007**

1. Considere os seguintes valores tabelados de uma função $f \in C^4[-4,4]$

x	-4	-2	2	4
$f(x)$	0	1	1	0

Determine o polinómio $p_3 \in \mathcal{P}_3[-4,4]$ que interpola a função f nos pontos de tabela. Supondo que $f^{(4)}(x) \in [-5,2]\ \forall x \in [-4,4]$, obtenha um majorante para o erro $|f(0) - p_3(0)|$. **[2.0]**

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^4[-2,2]$ e considere o integral $I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

a) Determine o nó x_1 e os pesos A_1 e A_2 de tal modo que a quadratura (para a aproximação numérica de $I(f)$)

$$Q(f) = A_1 f(-x_1) + A_2 f(x_1)\,, \qquad x_1 > 0\,,$$

seja exacta para polinómios de grau menor ou igual a 2. Qual é o grau de precisão da quadratura obtida? **[2.0]**

b) Suponha que $|f^{(4)}(x)| \le M\ \forall x \in [-2,2]$. Mostre que

$$|I(f) - Q(f)| \le \frac{32}{135}\,M\,. \qquad [\mathbf{1.5}]$$

3. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y), \quad a \le x \le b\,, \\ y(a) = \alpha\,. \end{cases}$$

e o seguinte método multipasso linear a 3 passos

$$y_{j+1} = -\,y_j + y_{j-1} + y_{j-2} + \frac{h}{3}\Big(8\,f(x_j,y_j) + 2\,f(x_{j-1},y_{j-1}) + 2\,f(x_{j-2},y_{j-2})\Big)\,, \quad j \ge 2\,. \quad (1)$$

a) Prove que o método (**??**) é consistente. Determine a sua ordem de consistência. **[1.5]**

b) Analise a estabilidade e a convergência do método (**??**). **[1.5]**

4. Prove que os polinómios de Chebyshev T_n, $n \ge 1$ podem ser definidos pela fórmula

$$T_n(x) = \det A_n(x)\,, \qquad A_n(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}\,. \qquad [\mathbf{1.5}]$$

1º **Exame: 3 de Julho de 2007**

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função dada por $f(x) = \sin x - x$. Prove que o cálculo de $f(x)$ para valores de x próximos de zero é um problema bem condicionado. **[2.0]**

2. Considere o seguinte sistema não linear

$$\begin{cases} \sin x_1 + 2\,x_2 = 1 \\ 2\,x_1 + e^{-x_2} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

a) Recorra ao teorema do ponto fixo para demonstrar que em

$$D = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\frac{1}{2} \le x_1 \le 0\,,\ \frac{1}{2} \le x_2 \le 1 \right\}$$

o sistema (**??**) tem uma única solução. **[2.0]**

b) Aproxime a solução $z \in D$ do sistema (**??**) efectuando três iterações pelo método do ponto fixo. Considere $x^{(0)} = (-0.5, 0.5)$ e prove que $\|z - x^{(3)}\|_\infty \le 0.032$. **[1.5]**

3. Considere o sistema linear $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

a) Prove que o método de Jacobi converge para a solução do sistema, qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$. **[1.5]**

b) Considere $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$ e determine as três primeiras iteradas pelo método de Jacobi. Obtenha uma estimativa para o erro da iterada $x^{(3)}$ na norma euclidiana $\|\cdot\|_2$. **[1.5]**

4. Seja $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ uma matriz não singular, seja $\{X_k\}$ uma sucessão de matrizes em $\mathbb{R}^{N\times N}$ definida por

$$X_{k+1} = X_k + X_k(I - AX_k), \quad k = 0, 1, \ldots, \qquad X_0 \in \mathbb{R}^{N\times N}\,,$$

e suponha que $\|I - AX_0\|_M < 1$, onde $\|\cdot\|_M$ é uma norma matricial induzida. Prove que a sucessão $\{X_k\}$ converge para A^{-1}. **[1.5]**

5.– 8. Problemas **1.– 4.** do 2^o **Teste**. **[10.0]**