Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Computacional (LMAC)

1^o **Teste – 4 de Maio de 2009**

1. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável e $z \in \mathbb{R}$ um ponto fixo de g tal que $g'(z) < -1$.

a) Prove que o método iterativo

$$x_{n+1} = \alpha\, g(x_n) + (1-\alpha)\, x_n\,, \quad n = 0, 1, \ldots\,, \qquad (1)$$

onde $\alpha \in]0, 1[$ é um parâmetro, converge localmente para z se

$$\alpha < \frac{2}{1 - g'(z)}\,.$$

Qual é a ordem de convergência do método? **[1.5]**

Considere a função iteradora $g(x) = 2 - 2\,\sin x$.

b) Prove que g tem um e um só ponto fixo no intervalo $[0.5, 1.0]$. Analise a convergência do método do ponto fixo e do método iterativo (1), com $\alpha = 1/2$, para esse ponto fixo no intervalo $[0.5, 1.0]$. **[1.5]**

c) Obtenha uma estimativa do ponto fixo $z \in [0.5, 1.0]$ de g pelo método iterativo (1), com $\alpha = 1/2$. Considere $x_0 = 0.5$, determine as quatro primeiras iteradas e estime o erro da última iterada. **[1.0]**

2. Suponha que a sucessão $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ de elementos de $\mathbb{R}^N$ converge para $z \in \mathbb{R}^N$ com ordem de convergência supralinear. Mostre que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k)} - z\|} = 1\,,$$

onde $\|\cdot\|$ é uma norma vectorial em $\mathbb{R}^N$. **[1.5]**

3. Considere a seguinte matriz simétrica e tridiagonal

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Prove que, dado $b \in \mathbb{R}^N$, o sistema linear $Ax = b$ admite uma e uma só solução. Mostre ainda que os métodos de Jacobi, Gauss-Seidel e das relaxações sucessivas (SOR) convergem todos para essa solução, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$. **[1.5]**

b) Considere o método de Jacobi e determine o número de iterações, necessário para que o erro na norma $\|\cdot\|_\infty$ seja reduzido a um centésimo do seu valor inicial. **[1.5]**

4. Mostre que o método de Newton converge, pelo menos localmente, para a solução $z \approx (0.79, -0.25, 0.97)$ do sistema não linear

$$\begin{cases} 2x^2 + y - 1 = 0 \\ x + 3\,y + z - 1 = 0 \\ y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Determine, pelo método de Newton, a primeira iterada a partir da aproximação inicial $x^{(0)} = [1\ 0\ 1]^T$. **[1.5]**