Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Computacional (LMAC)

2^o **Teste – 4 de Junho de 2009**

1. Seja $f \in C^3(\mathbb{R})$ uma função tal que

$$f(2) = 0\,, \quad f[3,2] = 1\,, \quad f[1,2,3] = 2\,, \quad \max_{x\in[1,3]} |f^{(3)}(x)| = 6\,.$$

Determine o polinómio p_2 de grau ≤ 2 que interpola f nos pontos $1, 2$ e 3. Calcule ainda $p_2(\frac{3}{2})$ e obtenha um majorante para o erro $|p_3(\frac{3}{2}) - f(\frac{3}{2})|$. **[2.0]**

2. Seja f uma função de que se conhecem os valores f_j nos pontos $x_j \in [a,b]\,,\ j = 0, \ldots, M$, seja $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_N(x)\}$ uma base em $\mathcal{P}_N[a,b]$ e ainda

$$\langle f, h\rangle = \sum_{k=0}^{M} f(x_k)\, h(x_k)$$

um produto interno em $\mathbb{R}^{M+1}$. Mostre que

$$\|f - g\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \|g\|_2^2}\,,$$

onde g é a melhor aproximação mínimos quadrados discreta de f em $\mathcal{P}_N[a,b]$ e $\|\cdot\|_2$ é a norma induzida pelo produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. **[1.5]**

3. Seja $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ e considere a seguinte fórmula de quadratura (regra do ponto médio)

$$I_0(f) = (b-a)\, f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\,,$$

para a aproximação numérica de $I(f)$. Deduza a regra do ponto médio composta, considerando partição de $[a,b]$ em n subintervalos de igual comprimento, e obtenha uma expressão para o erro da regra composta. **[2.0]**

4. Considere o seguinte método preditor-corrector

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + h\, f(t_n, y_n) \\[2ex] y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\Big(f(t_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}) + f(t_n, y_n)\Big) \end{cases} \qquad n = 0, 1, \ldots. \tag{1}$$

onde $h = t_{n+1} - t_n$, $\forall n \geq 0$.

a) Mostre que o método (1) pode ser escrito como um método de Runge-Kutta explícito de duas etapas e prove que ele é consistente. Determine a sua ordem. **[1.5]**

b) Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t}{\pi}\cos y(t)\,, \quad t > 0 \\[2ex] y(0) = \pi\,. \end{cases}$$

Aproxime a solução $y(t)$ em $t = 4\pi$ pelo método (1). Considere $t_0 = 0, y_0 = \pi$ e $h = \pi$. **[1.5]**

5. Determine todos os métodos multipasso lineares a dois passos da forma

$$y_{n+2} + a_1\, y_{n+1} + a_0\, y_n = h\, b_2\, f(t_{n+2}, y_{n+2})\,, \quad n \geq 0\,,$$

onde $a_1, a_0, b_2 \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0$, consistentes de ordem 2 e zero-estáveis. **[1.5]**