Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Computacional (Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação)

1^o **Teste: 11 de Maio de 2007 – Resolução**

1. a) Considere o seguinte algoritmo para o cálculo de y

$$z_1 = g(x)\,, \qquad y = g(z_1)$$

Temos

$$\delta_{\tilde z_1} = \frac{x\,g'(x)}{g(x)}\,\delta_{\tilde x} + \delta_{\text{arr},1}\,,$$

$$\delta_{\tilde y} = \frac{z_1\,g'(z_1)}{g(z_1)}\,\delta_{\tilde z_1} + \delta_{\text{arr},2} = \frac{g(x)\,g'(g(x))}{g(g(x))}\left(\frac{x\,g'(x)}{g(x)}\,\delta_{\tilde x} + \delta_{\text{arr}_1}\right) + \delta_{\text{arr},2} =$$

$$= \frac{x\,g'(g(x))\,g'(x)}{g(g(x))}\,\delta_{\tilde x} + \frac{g(x)\,g'(g(x))}{g(g(x))}\,\delta_{\text{arr},1} + \delta_{\text{arr},2}\,.$$

Note-se que

$$\frac{x\,g'(g(x))\,g'(x)}{g(g(x))}\,\delta_{\tilde x} = p_g(g(x))\,\delta_g(x) = p_g(g(x))\,p_g(x)\,\delta_{\tilde x} = p_{g\circ g}(x)\,\delta_{\tilde x} = \delta_{g\circ g}(x)\,.$$

b) Temos

$$\delta_{\tilde y} = p_{g\circ g}(x)\,\delta_{\tilde x} + q_1(x)\,\delta_{\text{arr},1} + \delta_{\text{arr},2}\,.$$

Se $x \approx z$, em que $z = g(z)$ e $|g'(z)| < 1$, segue-se que

$$|p_{g\circ g}(x)| = \left|\frac{x\,g'(g(x))\,g'(x)}{g(g(x))}\right| \approx |(g'(z))^2| < 1$$

ou seja, o cálculo de y é um problema bem condicionado para valores de x, próximos de um ponto fixo z de g tal que $|g'(z)| < 1$.

2. Sejam

$$g(x) = \frac{x}{2} + \frac{a}{2x}\,, \qquad I = \left[\sqrt{\frac{a}{2}}\,, \sqrt{2a}\right], \qquad a > 1\,.$$

Note-se que $g \in C^\infty(I)$ e que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo fechado. Como

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2} = \frac{x^2 - a}{2x^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{a}\,,$$

$$g\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = \frac{\sqrt{a/2}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{a/2}} = \sqrt{\frac{9a}{8}} \in I\,,$$

$$g(\sqrt{2a}) = \frac{\sqrt{2a}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{2a}} = \sqrt{\frac{9a}{8}} \in I\,,$$

$$g(\sqrt{a}) = \sqrt{a} \in I\,,$$

obtemos $g(I) \subset I$ e vemos que $z = \sqrt{a}$ é um ponto fixo de g em I. Por outro lado

$$g''(x) = \frac{a}{x^3} > 0 \qquad \forall\, x \in I\,,$$

$$g'\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}\,, \qquad g'(\sqrt{2a}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,,$$

donde resulta que $|g'(x)| \leq 1/2\ \forall x \in I$, ou seja, a função iteradora g é contractiva em I. As condições do Teorema do Ponto Fixo são satisfeitas pelo que o método iterativo $x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, \ldots$, converge para z, o único ponto fixo de g em I, qualquer que seja $x_0 \in I$.

b) Temos

$$\sqrt{a}\, -\, x_{n+1} = \sqrt{a}\, -\, \frac{x_n^2}{2x_n} - \frac{a}{2x_n} = \frac{2\sqrt{a}\, x_n - x_n^2 - a}{2x_n} = -\,\frac{(\sqrt{a} - x_n)^2}{2x_n}\,.$$

Tendo em conta que

$$\frac{1}{\sqrt{8a}} \leq \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2a}}\,, \qquad \forall\, n \geq 0\,,$$

concluímos que a ordem de convergência do método é quadrática.

c) Temos a estimativa do erro

$$|e_n| \leq K\, |e_{n-1}|^2 \leq \frac{1}{K}\Big(K|e_0|\Big)^{2^n}\,, \qquad K = \frac{1}{\sqrt{2a}}\,, \qquad n \geq 1\,,$$

onde

$$|e_0| \leq |I| = \sqrt{2a} - \sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{a}{2}} \quad \Longrightarrow \quad K|e_0| \leq 1/2 < 1\,.$$

Portanto

$$|e_6| \leq \frac{1}{K}\Big(K|e_0|\Big)^{2^6} \leq \sqrt{2a}\, 2^{-64} \approx 7.7 \cdot 10^{-20}\, \sqrt{a} < 8.0 \cdot 10^{-20}\, \sqrt{a}\,.$$

3. a) Sejam

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O método de Gauss-Seidel converge se e só se as raízes da equação característica

$$\det[\lambda(L + D) + U] = 0\,,$$

forem todas, em módulo, menores do que 1, visto que as raízes coincidem com os valores próprios da matriz de iteração do método de Gauss-Seidel $C = -(L + D)^{-1}U$. Temos

$$\lambda(L + D) + U = \begin{bmatrix} 2\lambda & a & 0 \\ \lambda a & 2\lambda & 2 \\ 0 & 2\lambda & 4\lambda \end{bmatrix},$$

$$\det[\lambda(L + D) + U] = 2\lambda(8\lambda^2 - 4\lambda) + a(-4\lambda^2 a) = 4\lambda^2(4\lambda - 2 - a^2) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = 0\,, \quad \lambda_3 = \frac{2 + a^2}{4}\,.$$

Portanto $r_\sigma(C) < 1$ se e só se $|\lambda_3| < 1$ ou seja, se e só se $|a| < \sqrt{2}$.

b) Quando $a = 0$, temos

$$L + D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (L+D)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$x^{(n+1)} = C\,x^{(n)} + d\,, \qquad C = -\,(L+D)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad d = (L+D)^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, obtém-se

$$x^{(1)} = C\,x^{(0)} + d = d = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x^{(2)} = C\,x^{(1)} + d = Cd + d = d\,.$$

É fácil ver que $x^{(n)} = d \;\forall\, n \geq 1$ e que $d = x$ é a solução exacta do sistema linear $Ax = b$. Por outro lado $\|C\|_1 = 3/2$, $\|C\|_\infty = 1$ e $\|C\|_2 = \sqrt{r_\sigma(C^T C)} = \sqrt{5}/2$ visto que

$$C^T C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$

Como $\|C\|_j \geq 1$, $j = 1, 2, \infty$, a estimativa do erro

$$\|x - x^{(n+1)}\|_j \leq \frac{L}{1-L}\,\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\|_j\,, \quad j = 1, 2, \infty\,,$$

não se aplica com $L = \|C\|_j, j = 1, 2, \infty$, embora o erro da iterada $x^{(2)}$ seja de facto igual a zero com esta escolha da aproximação inicial. No entanto, quando o método convergir a constante L pode ser aproximada pelo valor

$$\frac{\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\|_j}{\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_j}\,.$$

que normalmente é próximo de $r_\sigma(C)$. Note-se ainda que neste problema $r_\sigma(C) = \frac{1}{2} < 1$.