Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Computacional (Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação)

1^o **Teste: 11 de Maio de 2007**

1. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável e considere o cálculo de $y = g(g(x))$.

a) Obtenha uma expressão para o erro relativo de y em termos do erro relativo de x e dos erros relativos de arredondamento associados ao cálculo dos valores de g. **[1.5]**

b) Prove que o cálculo de y é um problema bem condicionado para valores de x próximos de um ponto fixo z de g tal que $|g'(z)| < 1$. **[1.0]**

2. Considere a sucessão $\{x_n\}$ definida por

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{a}{2x_n}\,, \quad n = 0, 1, \ldots \\[2ex] x_0 \in \left[\sqrt{\dfrac{a}{2}}\,, \sqrt{2a}\right], \qquad a > 1\,. \end{cases} \tag{1}$$

a) Prove que a sucessão $\{x_n\}$ converge para $z = \sqrt{a}$. **[2.0]**

b) Prove que

$$z - x_{n+1} = -\frac{(z - x_n)^2}{2x_n}\,.$$

Diga, justificando, qual é a ordem de convergência do método iterativo (**??**). **[1.5]**

c) Mostre, sem efectuar iterações, que

$$|z - x_6| \leq 8.0 \cdot 10^{-20}\sqrt{a}\,.$$ **[1.0]**

3. Considere o sistema linear $Ax = b$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde $a \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, o método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema, desde que $|a| < \sqrt{2}$. **[1.5]**

b) Seja $a = 0$ e considere $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$. Calcule as iteradas $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ pelo método de Gauss-Seidel. Tente estimar o erro de $x^{(2)}$ na norma da soma, na norma euclidiana e na norma do máximo. Comente. **[1.5]**