Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Unidade de Ensino de Matemática Aplicada e Análise Numérica

MEEC – Matemática Computacional

Exame / Primeiro Teste – 20 de Janeiro de 2012

Justifique todas as respostas e apresente todos os cálculos que tiver que efetuar

1. Considere um sistema de representação numérica de ponto flutuante $\mathbb{F}$, de base 10, com 5 dígitos na mantissa e arredondamento simétrico.

   (a) Indique o valor da unidade de arredondamento de $\mathbb{F}$. **[0.5]**

   (b) Qual é o menor número positivo x, tal que $1 + x$ tem uma representação em $\mathbb{F}$ distinta de 1? **[1.0]**

   (c) Sejam $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ valores aproximados de a, b, c, respetivamente, com erros relativos $\delta_{\tilde{a}}, \delta_{\tilde{b}}, \delta_{\tilde{c}}$. Determine uma estimativa do erro relativo cometido no cálculo de $w = ab + c$ em $\mathbb{F}$. **[1.5]**

2. Considere a equação
$$\exp(x) + x = 0$$
a qual tem uma solução única z situada no intervalo $[-1, 0]$.

   (a) Mostre que o método da secante com iteradas iniciais $x_{-1} \neq x_0$ no intervalo $[-1, 0]$ converge para z. **[1.0]**

   (b) Tomando as iteradas iniciais $x_{-1} = -0.7$ e $x_0 = -0.4$, determine a segunda iterada do método da secante x_2 e obtenha um majorante do erro $|z - x_2|$. **[1.5]**

   (c) Considere o método iterativo definido por
$$x_{n+1} = -\exp(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1}$$

      i. Mostre que se partirmos de $x_0 = -0.5$ o método é convergente para z e que se verifica **[2.0]**
$$|z - x_{n+1}| \leq |x_{n+1} - x_n| \,.$$

      ii. Utilize o método iterativo (1) com $x_0 = -0.5$ para aproximar z com erro absoluto inferior a 0.5×10^{-1}. **[1.0]**

      iii. Sem efetuar mais iterações, determine quantas iteradas teria ainda que calcular para obter um valor aproximado de z para o qual pudesse garantir um erro inferior a 10^{-5}. **[1.5]**

Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Unidade de Ensino de Matemática Aplicada e Análise Numérica

MEEC – Matemática Computacional

Exame / Segundo Teste – 20 de Janeiro de 2012

Justifique todas as respostas e apresente todos os cálculos que tiver que efetuar

1. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \\ -3x_1 + 2x_3 = 1 \\ -3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

   (a) Justifique a convergência do método de Jacobi para a solução do sistema, qualquer que seja a iterada inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$. **[1.0]**

   (b) Começando com $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$, determine a primeira iterada do método de Jacobi e obtenha um majorante do erro da iterada $x^{(50)}$ numa norma apropriada. **[1.5]**

2. Considere o sistema de equações algébricas não-lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_1(x_1 + x_2)^2 = 0.5 \\ x_2 + x_2(x_1 - x_2)^2 = 0.5 \end{cases}$$

   o qual tem solução única z em $\mathbb{R}^2$. Calcule uma aproximação $x^{(2)}$ para z usando duas iteradas do método de Newton com aproximação inicial $x^{(0)} = [0\ 0]^T$. **[1.5]**

3. Considere a tabela

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$f(x_i)$	1	0.9992	0.987227	0.935897	0.802096	0.540302

   de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz $|f''(x)| \leq 4$, para todo o $x \in [0, 1]$.

   (a) Determine, através da fórmula de Newton, o polinómio interpolador de f nos nós x_0, x_3 e x_5. **[1.0]**

   (b) Determine de entre as funções da forma $g(x) := A + Bx^4$ aquela que melhor aproxima f no sentido dos mínimos quadrados. **[1.5]**

   (c) Calcule um valor aproximado para $\int_0^1 f(x)dx$ usando todos os valores de f tabelados e determine um majorante do erro absoluto do valor obtido. **[2.0]**

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = [y(t)]^3 + 2ty(t) + 3, \quad t \geq 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

   Obtenha um valor aproximado para $y(1.2)$ usando o método de Heun com passo $h = 0.1$. **[1.5]**

Resolução - Primeira Parte

1. (a) A unidade de arredondamento de $\mathbb{F}$ vale $U_s = \frac{1}{2}10^{1-5} = 0.5 \times 10^{-4}$.

   (b) A representação de 1 em $\mathbb{F}$ é exata e tem-se $fl(1) = +0.10000 \times 10^1$. O menor número imediatamente superior pertencente ao sistema é $y = +0.10001 \times 10^1$. Tem-se

   $$\begin{aligned} y = fl(+0.100005 \times 10^1) &= fl(+0.10000 \times 10^1 + 0.000005 \times 10^1) \\ &= fl(+0.10000 \times 10^1 + 0.50000 \times 10^{-4}) = fl(1 + U_s), \end{aligned}$$

   e, por outro lado, se $0 < x < U_s \Longleftrightarrow 0 < x < 0.5 \times 10^{-4}$ então

   $$fl(1 + x) = fl(+0.10000d... \times 10^1) = fl(1) \text{ com } 0 \leq d < 5.$$

   Assim, $x = U_s$.

   (c) O cálculo de w é efetuado pelo seguinte algoritmo com 2 passos:

   $$w_1 = a \times b, \qquad w_2 = w_1 + c.$$

   Ao executarmos este algoritmo em $\mathbb{F}$, ocorre a seguinte propagação de erros:

   $$\begin{aligned} \delta_{\tilde{w}_1} &= \delta_{\tilde{a}} + \delta_{\tilde{b}} + \delta_{\tilde{a}}\delta_{\tilde{b}} + \delta_{arr_1}, \\ \delta_{\tilde{w}_2} &= \frac{w_1}{w_1 + c}\delta_{\tilde{w}_1} + \frac{c}{w_1 + c}\delta_{\tilde{c}} + \delta_{arr_2}. \end{aligned}$$

   O erro relativo cometido no cálculo de w em $\mathbb{F}$ é dado por

   $$\begin{aligned} \delta_{\tilde{w}} = \delta_{\tilde{w}_2} &= \frac{w_1}{w_1 + c}\delta_{\tilde{w}_1} + \frac{c}{w_1 + c}\delta_{\tilde{c}} + \delta_{arr_2} \\ &= \frac{ab}{ab + c}\left(\delta_{\tilde{a}} + \delta_{\tilde{b}} + \delta_{\tilde{a}}\delta_{\tilde{b}} + \delta_{arr_1}\right) + \frac{c}{ab + c}\delta_{\tilde{c}} + \delta_{arr_2} \\ &= \frac{ab}{w}\left(\delta_{\tilde{a}} + \delta_{\tilde{b}} + \delta_{\tilde{a}}\delta_{\tilde{b}}\right) + \frac{c}{w}\delta_{\tilde{c}} + \frac{ab}{w}\delta_{arr_1} + \delta_{arr_2}. \end{aligned}$$

   Como $|\delta_{arr_1}|, |\delta_{arr_2}| \leq U_s = 0.5 \times 10^{-4}$, a estimativa pretendida é

   $$|\delta_{\tilde{w}}| \leq \left|\frac{ab}{w}\right| \left(|\delta_{\tilde{a}}| + |\delta_{\tilde{b}}| + |\delta_{\tilde{a}}||\delta_{\tilde{b}}|\right) + \left|\frac{c}{w}\right| |\delta_{\tilde{c}}| + \left(\left|\frac{ab}{w}\right| + 1\right) U_s\,.$$

2. (a) A equação que pretendemos resolver é da forma $f(x) = 0$ com $f(x) := \exp(x) + x$. A função f é de classe C^2 em $[-1, 0]$ (mais precisamente, f é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$) com

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \exp(x) + 1\,, \\ f''(x) &= \exp(x). \end{aligned}$$

   Tem-se

   $$f(-1) \times f(0) = (-0.632121) \times 1 < 0$$

e é claro que

$$f'(x) > 0,\ f''(x) > 0,\ \forall x \in [-1, 0].$$

Tem-se ainda

$$\left|\frac{f(-1)}{f'(-1)}\right| = 0.462117 < 1 \text{ e } \left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right| = 0.5 < 1.$$

Assim, a função f e o intervalo $[-1, 0]$ satisfazem as quatro condições suficientes de convergência do método da secante.

(b) Com $x_{-1} = -0.7$ e $x_0 = -0.4$, as duas primeiras iteradas do método da secante são:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)(x_0 - x_{-1})}{f(x_0) - f(x_{-1})} = -0.571184$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = -0.567269\,.$$

Para majorar o erro de x_2, começamos por notar que $z \in [x_2, x_0]$, uma vez que $f(x_2) = -0.000196268 < 0$ e $f(x_0) = 0.27032 > 0$.

Agora, atendendo a que f' é positiva e crescente em $[x_2, x_0]$ (até mesmo em $\mathbb{R}$), vem

$$|z - x_2| \leq \frac{|f(x_2)|}{\min_{x\in[x_2,x_0]} |f'(x)|} \leq \frac{|f(x_2)|}{f'(x_2)} = 0.000125245.$$

É claro que poderíamos ter usado a fórmula de majoração do erro do método da secante, através da qual teríamos

$$|z - x_2| \leq \mathbb{K}|z - x_1||z - x_2|$$

com

$$\mathbb{K} = \frac{\max_{x\in[x_1,x_0]} |f''(x)|}{2\min_{x\in[x_1,x_0]} |f'(x)|} = \frac{f''(x_0)}{2f'(x_1)} = 0.214179.$$

e

$$|z - x_1| \leq x_0 - x_2 \text{ e } |z - x_2| \leq x_0 - x_1\,,$$

ou seja,

$$|z - x_2| \leq 0.00613277.$$

Note-se que este resultado é menos preciso que o anterior.

(c) i. Sejam $g(x) := -\exp(x)$ e $x_0 = -0.5$. É claro que $g \in C^1(I)$ e tem-se

$$g'(x) = -\exp(x).$$

Como $g' < 0$ em $\mathbb{R}$, se o método do ponto fixo (1) for convergente para z, a convergência será alternada, ou seja, as iteradas ficarão alternadamente do lado direito e esquerdo de z.

Seja $I := [x_1, x_0]$ onde

$$x_1 = g(x_0) = -0.606531.$$

Como g é estritamente monótona (decrescente) em I, e

$$g(x_0) \in I, \quad g(x_1) = -0.545239 \in I$$

podemos concluir que $g(I) \subseteq I$. Tem-se ainda

$$L := \max_{x \in I} |g'(x)| = \max_{x \in I} \exp(x) = \exp(-0.5) = 0.606531 < 1$$

pelo que g é contrativa em I. Então, o Teorema do ponto fixo garante que a sucessão definida por (1) com $x_0 = -0.5$ converge para o único ponto fixo de g no intervalo I. Atendendo a que

$$x = g(x) \Longleftrightarrow x = -\exp(x) \Longleftrightarrow x + \exp(x) = 0$$

conclui-se que o método (1) converge para a solução da equação dada.
Como o método do ponto fixo tem convergência alternada, tem-se

$$|z - x_{n+1}| \le |x_{n+1} - x_n|\,.$$

ii. Na alínea anterior já calculámos x_1 e x_2 e atendendo à fórmula de majoração do erro, tem-se

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0) = -0.606531\,, \quad |x_1 - x_0| = 0.106531, \\ x_2 &= g(x_1) = -0.545239\,, \quad |x_2 - x_1| = 0.0612914. \end{aligned}$$

Prosseguindo a iteração:

$$x_3 = g(x_2) = -0.579703\,, \quad |x_3 - x_2| = 0.0344639 < 0.5 \times 10^{-1}.$$

Então como $|z - x_3| \le |x_3 - x_2|$, conclui-se que $z \approx -0.579703$ com erro inferior a 0.5×10^{-1}.

iii. Pela fórmula de majoração do erro *a priori* para o método do ponto fixo, tem-se

$$|z - x_{3+k}| \le L^k |z - x_3|, \quad k = 0, 1, 2....$$

Atendendo aos resultados das alíneas anteriores, podemos considerar $L = 0.606531$ e usar a estimativa $|z - x_3| \le 0.0344639$. Assim, tem-se

$$|z - x_{3+k}| \le 0.0344639(0.606531)^k, \quad k = 0, 1, 2....$$

Se $0.0344639(0.606531)^k < 0.5 \times 10^{-5}$ então $|z - x_{3+k}| < 0.5 \times 10^{-5}$, como pretendido. Ora

$$\begin{gathered} 0.0344639(0.606531)^k < 0.5 \times 10^{-5} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow (0.606531)^k < 0.145079 \times 10^{-3} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow k \ln(0.606531) < \ln(0.145079 \times 10^{-3}) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow k > \frac{\ln(0.145079 \times 10^{-3})}{\ln(0.606531)} = 17.6765 \end{gathered}$$

pelo que seriam necessárias mais 18 iterações.

(c) - Alternativa

i. Sejam $g(x) := -\exp(x)$ e $I := [-0.7, -0.4]$ (intervalo sugerido pela alínea anterior). É claro que $g \in C^1(I)$ e tem-se

$$g'(x) = -\exp(x).$$

Como g é estritamente monótona (decrescente) em I, e

$$g(-0.7) = -0.496585 \in I, \quad g(-0.4) = -0.67032 \in I$$

podemos concluir que $g(I) \subseteq I$. Tem-se ainda

$$L := \max_{x \in I} |g'(x)| = \max_{x \in I} \exp(x) = \exp(-0.4) = 0.67032 < 1$$

pelo que g é contrativa em I. Então, o Teorema do ponto fixo garante que a sucessão definida por (1) converge para o único ponto fixo de g no intervalo I, qualquer que seja $x_0 \in I$. Em particular, há convergência quando tomamos $x_0 = -0.5$ para iterada inicial. Atendendo a que

$$x = g(x) \Longleftrightarrow x = -\exp(x) \Longleftrightarrow x + \exp(x) = 0$$

conclui-se que o método (1) converge para a solução da equação dada.
Agora, notamos que

$$-1 < g'(x) < 0, \, \forall x \in I$$

pelo que o método do ponto fixo tem convergência alternada, ou seja, as iteradas ficam alternadamente do lado direito e esquerdo de z. Então, tem-se

$$|z - x_{n+1}| \leq |x_{n+1} - x_n| \, .$$

ii. Com $x_0 = -0.5$ obtém-se

$$\begin{aligned}
x_1 &= g(x_0) = -0.606531\,, \quad |x_1 - x_0| = 0.106531 \\
x_2 &= g(x_1) = -0.545239\,, \quad |x_2 - x_1| = 0.0612914 \\
x_3 &= g(x_2) = -0.579703\,, \quad |x_3 - x_2| = 0.0344639 < 0.5 \times 10^{-1}
\end{aligned}$$

Então como $|z - x_3| \leq |x_3 - x_2|$, conclui-se que $z \approx -0.579703$ com erro inferior a 0.5×10^{-1}.

iii. Pela fórmula de majoração do erro *a priori* para o método do ponto fixo, tem-se

$$|z - x_{3+k}| \leq L^k |z - x_3|, \quad k = 0, 1, 2....$$

Atendendo aos resultados das alíneas anteriores, podemos considerar $L = 0.67032$ e usar a estimativa $|z - x_3| \leq 0.0344639$. Assim, tem-se

$$|z - x_{3+k}| \leq 0.0344639(0.67032)^k, \quad k = 0, 1, 2....$$

Se $0.0344639(0.67032)^k < 0.5 \times 10^{-5}$ então $|z - x_{3+k}| < 0.5 \times 10^{-5}$, como pretendido. Ora

$$0.0344639(0.67032)^k < 0.5 \times 10^{-5} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (0.67032)^k < 0.145079 \times 10^{-3} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow k \ln(0.67032) < \ln(0.145079 \times 10^{-3}) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow k > \frac{\ln(0.145079 \times 10^{-3})}{\ln(0.67032)} = 22.0956$$

pelo que seriam necessárias mais 23 iterações.

Resolução - Segunda Parte

1. (a) Através de trocas de linhas no sistema obtem-se

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \\ -3x_1 + 2x_3 = 1 \\ -3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x_1 + 2x_3 = 1 \\ -3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$$

onde a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

tem diagonal principal estritamente dominante por linhas:

$$|-3| > |2| \text{ na primeira e segunda linhas}$$
$$|-5| > |2| + |2| \text{ na terceira linha}$$

Fica assim garantida a convergência do método de Jacobi qualquer que seja a iterada inicial.

(b) O método de Jacobi escreve-se

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{2}{3}x_3^{(k)} - \frac{1}{3} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{2}{3}x_3^{(k)} - \frac{1}{3} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{2}{5}x_1^{(k)} + \frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}, \quad k = 0, 1, 2, ... \end{cases} \tag{2}$$

Começando com $x^{(0)} = [0\ \ 0\ \ 0]^T$ obtém-se $x^{(1)} = [-\frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{5}]^T$.
Podemos escrever as fórmulas (2) na forma matricial

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

e concluir imediatamente que, neste caso, a matriz de iteração do método de Jacobi é

$$C_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\|C_J\|_\infty = \frac{4}{5} = 0.8 < 1\,,$$

o que está de acordo com o facto de A ter diagonal estritamente dominante por linhas. Então, a fórmula de majoração *a priori* fica

$$\|z - x^{(k)}\|_\infty \le \frac{\|C_J\|_\infty^k}{1 - \|C_J\|_\infty} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \frac{(0.8)^k}{0.6}, \forall k \in \mathbb{N},$$

onde usámos $\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \frac{1}{3}$. Para $k = 50$ obtém-se

$$\|x - x^{(50)}\|_\infty \le 0.0000237875.$$

2. O sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_1(x_1+x_2)^2 = 0.5 \\ x_2 + x_2(x_1-x_2)^2 = 0.5 \end{cases}$$

pode-se escrever na forma

$$F(x) = 0$$

com

$$F(x_1,x_2) := \begin{bmatrix} x_1 + x_1(x_1+x_2)^2 - 0.5 \\ x_2 + x_2(x_1-x_2)^2 - 0.5 \end{bmatrix}.$$

A matriz Jacobiana de F é

$$J_F(x) = \begin{bmatrix} 1 + (x_1+x_2)^2 + 2x_1(x_1+x_2) & 2x_1(x_1+x_2) \\ 2x_2(x_1-x_2) & 1 + (x_1-x_2)^2 - 2x_1(x_1-x_2) \end{bmatrix}.$$

Começando com $x^{(0)} = [0 \quad 0]^T$, determinamos $\Delta x^{(0)}$ resolvendo o sistema linear

$$J_F(x^{(0)})\Delta x^{(0)} = -F(x^{(0)}).$$

Tem-se

$$F(x^{(0)}) = F(0,0) = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \qquad J_F(x^{(0)}) = J_F(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\Delta x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \qquad x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Agora, determinamos $\Delta x^{(1)}$ resolvendo o sistema linear

$$J_F(x^{(1)})\Delta x^{(1)} = -F(x^{(1)})$$

onde

$$F(x^{(1)}) = F(0.5, 0.5) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$J_F(x^{(1)}) = J_F(0.5, 0.5) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtém-se

$$\Delta x^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.166667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto a segunda iterada do método de Newton é

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.333333 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Usando a fórmula de Newton, tem-se a seguinte expressão para o polinómio interpolador

$$p_2(x) = f[x_0] + f[x_0,x_3](x-x_0) + f[x_0,x_3,x_5](x-x_0)(x-x_3)$$

A tabela de diferenças divididas é:

$$\begin{array}{cclc}
0 & 1 & & \\
 & & \frac{0.935897-1}{0.6-0} = -0.106838 & \\
0.6 & 0.935897 & & \frac{-0.988988-(-0.106838)}{1-0} = -0.88215 \\
 & & \frac{0.540302-0.935897}{1-0.6} = -0.988988 & \\
1 & 0.540302 & &
\end{array}$$

Assim,

$$p_2(x) = 1 - 0.106838x - 0.88215x(x-0.6)\,.$$

(b) As funções de base são $\phi_0(x) := 1$ e $\phi_1(x) := x^4$. Os parâmetros A e B obtêm-se resolvendo o sistema normal

$$\begin{bmatrix} (\phi_0,\phi_0) & (\phi_0,\phi_1) \\ (\phi_1,\phi_0) & (\phi_1,\phi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\phi_0) \\ (f,\phi_1) \end{bmatrix},$$

onde

$$(\phi_0,\phi_0) = \sum_{i=0}^{5} 1 = 6$$

$$(\phi_0,\phi_1) = (\phi_1,\phi_0) = \sum_{i=0}^{5} x_i^4 = 1.5664$$

$$(\phi_1,\phi_1) = \sum_{i=0}^{5} x_i^8 = 1.18523$$

$$(f,\phi_0) = \sum_{i=0}^{5} f(x_i) = 5.26472$$

$$(f,\phi_1) = \sum_{i=0}^{5} x_i^4 f(x_i) = 1.017$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} 6 & 1.5664 \\ 1.5664 & 1.18523 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.26472 \\ 1.017 \end{bmatrix}$$

(cuja matriz é definida positiva) obtém-se

$$g(x) = 0.997661 - 0.460447x^4\,.$$

(c) Aplicando a regra dos trapézios no intervalo $[0,1]$ com $h = 0.2$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &\approx \frac{0.2}{2}[f(0) + f(1) + 2(f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8))] \\
&= 0.1[1 + 0.540302 + 2 \times (0.9992 + 0.987227 + 0.935897 + 0.802096)] \\
&= 0.898914\,.
\end{aligned}$$

Como $|f''(x)| \leq 4$, para todo o $x \in [0,1]$, o erro de integração satisfaz

$$\begin{aligned}
|E_T(f)| &= \frac{(0.2)^2}{12}|f''(\xi)| \quad \text{para algum } \xi \in (0,1) \\
&\leq \frac{(0.2)^2}{3} = 0.0133333.
\end{aligned}$$

4. Devemos considerar a função

$$f(t,y) := y^3 + 2ty + 3$$

e para $h = 0.1$, obtemos os pontos

$$t_i = 1 + 0.1i,\ i = 0,1,2,...$$

Assim, $y(1.2) = y(t_2) \approx y_2$, sendo y_2 obtido pelo método de Heun

$$\begin{cases} y_0 = 1\,, \\ y_{i+1} = y_i + 0.05[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_i + 0.1f(t_i, y_i))],\ i = 0,1,2,... \end{cases}$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
&f(t_0, y_0) = f(1,1) = 6\,,\\
&f(t_1, y_0 + 0.1f(t_0, y_0)) = f(1.1, 1 + 0.1 \times 6) = f(1.1, 1.6) = 10.616\,,\\
y_1 &= y_0 + 0.05[f(t_0, y_0) + f(t_1, y_0 + 0.1f(t_0, y_0))] = 1 + 0.05(6 + 10.616) = 1.8308\,,\\
&f(t_1, y_1) = f(1.1, 1.8308) = 13.1643\,,\\
&f(t_2, y_1 + 0.1f(t_1, y_1)) = f(1.2, 1.8308 + 0.1 \times 13.1643) = f(1.2, 3.14723) = 41.7268\,,\\
y_2 &= y_1 + 0.05[f(t_1, y_1) + f(t_2, y_1 + 0.1f(t_1, y_1))]\\
&= 1.8308 + 0.05(13.1643 + 41.7268) = 4.57536
\end{aligned}$$