Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Computacional (LMAC)

Teste de Recuperação – 20 de Junho de 2009

1º **Teste**

1. Considere o cálculo de $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ para valores de x próximos de zero.

Mostre que o problema é bem condicionado. Analise a estabilidade numérica do algoritmo

$$z_1 = x + 1 \,, \qquad z_2 = \sqrt{z_1} \,, \qquad z_3 = z_2 - 1 \,,$$

quando $x \approx 0$. **[2.0]**

2. Prove que a função real $g(x) = 3^{-x}$ admite um e um só ponto fixo $z \in \mathbb{R}$. Mostre que a sucessão $\{x_n\}$, definida por

$$x_0 = 1 \,, \qquad x_{n+1} = g(x_n) \,, \quad n = 0, 1, \dots \,,$$

converge para z e determine os seis primeiros termos da sucessão $\{x_n\}$. Obtenha um majorante para o erro $|z - x_5|$. **[2.5]**

3. Considere a seguinte matriz simétrica e tridiagonal

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Mostre que a matriz A é definida positiva e obtenha a sua decomposição de Cholesky, i.e. determine uma matriz triangular inferior L tal que $A = LL^T$. **[2.0]**

4. Seja $A \in \mathbb{R}^N$ uma matriz estritamente diagonal dominante por colunas, $b \in \mathbb{R}^N$ um vector dado e considere a resolução do sistema linear $Ax = b$. Mostre que o sistema $Ax = b$ tem uma e uma só solução e que método iterativo de Jacobi converge para essa solução qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$. **[2.0]**

5. Seja $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continuamente diferenciável e $z \in \mathbb{R}^N$ uma raiz da equação $F(x) = 0$. Suponha que a matriz Jacobiana $J_F(z)$ existe e é não singular e considere o seguinte método iterativo para a aproximação de z

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} - A\,F(x^{(k)}) \,, \qquad k = 0, 1, \dots \\ \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^N \,, \end{cases} \tag{1}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Apresente condições necessárias e suficientes para que o método (1) seja convergente, pelo menos localmente numa vizinhança de z. Qual é a ordem de convergência do método? **[1.5]**

2^{o} **Teste**

1. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pontos distintos de $[a,b]$ e $f_0, f_1, \ldots, f_n$ valores de uma função f nesses pontos. Seja ainda p_k, $1 \leq k \leq n$, o polinómio interpolador (de grau $\leq k$) de f nos pontos $x_0, \ldots, x_k$. Mostre que

$$p_k(x) = \frac{(x-x_0)p_{k-1}^*(x) - (x-x_k)p_{k-1}(x)}{x_k - x_0}\,,$$

em que p_{k-1}^* é o polinómio interpolador (de grau $\leq k-1$) de f nos pontos $x_1, \ldots, x_k$. **[1.5]**

2. Considere os seguintes valores tabelados de uma função $f \in C^4([-2,2])$

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	1	0	0	1

Determine o polinómio $p_3 \in \mathcal{P}_3[-2,2]$ que interpola f nos quatro pontos da tabela. Mostre ainda que

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{6} \max_{x\in[-2,2]} |f^{(4)}(x)|\,. \qquad \textbf{[1.5]}$$

3. Seja $I(f) = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx$ e considere a seguinte fórmula de quadratura

$$Q(f) = f(-1) + f(1)\,,$$

para a aproximação numérica de $I(f)$. Determine o grau de precisão da quadratura e obtenha uma expressão para o erro $I(f) - Q(f)$. **[2.0]**

4. Considere a seguinte tabela de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \qquad (2)$$

Mostre que o método de Runge-Kutta explícito, associado à tabela (2), é consistente. Determine a sua ordem. **[1.5]**

5. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = -\,t\,y(t)\,, \quad t > 0 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Aproxime a solução $y(t)$ em $t = 4$ pelo método de Crank-Nicolson. Considere $t_0 = 0, y_0 = 1$ e $h = 1$. **[1.5]**

6. Considere a seguinte família de métodos multipasso

$$y_{n+4} - y_n = h\Big(b_4\,f(t_{n+4}, y_{n+4}) + b_2\,f(t_{n+2}, y_{n+2}) + b_0\,f(t_n, y_n)\Big)\,, \quad n \geq 0\,,$$

onde $b_0, b_2, b_4 \in \mathbb{R}$, com $b_0 + b_2 + b_4 = 4$. Verifique que todos estes métodos são consistentes. Analise a zero-estabilidade e convergência dos métodos. **[2.0]**