Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática •
Unidade de Ensino de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Matemática Computacional
LMat, MEEC, MEFT, MEQ

Teste de 21 de Dezembro de 2012 (Duração: 1h30m)

Observação: O símbolo α em algumas questões designa o último dígito do seu número de aluno.

1) Considere o sistema

$$\begin{cases} 3\,x_1 + x_2 & = 4 \\ \sin(x_1) - 2\,x_2 & = 1 \\ x_3 & = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Fazendo $w^{(0)} = [0, 1, \alpha]^T$, mostre que a primeira iterada $w^{(1)}$ do método de Newton aplicado ao sistema $(*)$ pode ser calculada resolvendo um sistema linear da forma $A\,w = c$, onde **[1.5]**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c = [3, 3, 1-\alpha]^T.$$

Calcule exactamente $||w - w^{(1)}||_1$.

(b) Diga, justificando, se poderá aplicar o método iterativo de Jacobi para aproximar a solução w do sistema linear $A\,w = c$. **[1.5]**

(c) Nesta alínea suponha que $\underline{\alpha = 1}$. Partindo de $w^{(0)} = [1, 1, 1]^T$, calcule a segunda iterada $w^{(2)}$ do método de Gauss-Seidel, bem como um majorante para $||w - w^{(2)}||_1$. **[1.5]**

2) Considere a função real

$$f(x) = \begin{cases} \alpha + 1 + 4\cos x, & \text{se} \quad 0 \le x < \pi \\ \dfrac{x^2}{2} - x + 1, & \text{se} \quad x \ge \pi, \end{cases}$$

onde α tem o significado referido na Observação.

Comece por determinar uma tabela de valores $(x_i, f(x_i))$, onde $f(x_i)$ ou é exacto ou possui pelo menos 5 algarismos significativos, sendo $x_i = 3, 4, 5, 6$.

(a) Usando o polinómio $q(x)$, interpolador da função nos <u>três últimos</u> pontos tabelados, obtenha o valor $q(5.2)$. Calcule o respectivo erro de interpolação. Justifique. **[1.5]**

(b) Mediante funções aproximantes do tipo **[1.5]**

$$\Psi(x) = c_1\, sin(x) + c_2\, sin(2\, x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

obtenha a matriz A de um sistema linear $A\, c = \omega$ cuja solução lhe permite obter a melhor aproximação de mínimos quadrados dos <u>três primeiros</u> pontos tabelados. Apresente a matriz pedida A, cujas entradas estejam arredondadas na forma $\pm d_1.d_2$ (por exemplo, 1.5). Note que não é necessário calcular a solução do sistema referido mas deverá indicar as componentes de c e ω.

(c) Diga, justificando, se poderá aplicar a regra de Simpson simples para aproximar $\int_3^5 f(x)dx$. No caso afirmativo, como estimaria o respectivo erro? **[1.5]**

(d) Aplique a regra dos trapézios composta , com passo $h = 1$, para aproximar **[1.0]**

$$\int_4^6 (\alpha + 1)\, f(x)dx.$$

.

Métodos iterativos para sistemas lineares:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \|\mathbf{C}\|^k \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\|, \qquad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \frac{\|\mathbf{C}\|^k}{1 - \|\mathbf{C}\|} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)}\| \leq \frac{\|\mathbf{C}\|}{1 - \|\mathbf{C}\|} \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|$$

Método de Jacobi: $C = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$ $\qquad x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)})/a_{ii}$

Método de Gauss-Seidel:

$$C = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}$$
$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)})/a_{ii}$$

Método de Newton para sistemas não lineares:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \qquad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)}+\Delta\mathbf{x}^{(k)} \qquad ||x-x^{(k)}|| \simeq ||x^{(k+1)}-x^{(k)}||$$

Interpolação Polinomial. Fórmula de Lagrange:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (\frac{x-x_j}{x_i-x_j}) \qquad p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, l_i(x)$$

Fórmula de Newton com dif. divididas:

$$\begin{cases} f[x_j] = f(x_j), \quad j = 0, ..., n \\ f[x_j, ..., x_{j+k}] = \dfrac{f[x_{j+1}, ..., x_{j+k}] - f[x_j, ..., x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j}, \quad j = 0, ..., n-k, \quad k = 1, ..., n \end{cases}$$

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, ..., x_i](x-x_0)\cdots(x-x_{i-1}), \qquad e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

Mínimos quadrados:

$$\begin{bmatrix} (\phi_0,\phi_0) & \dots & (\phi_0,\phi_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\phi_m,\phi_0) & \dots & (\phi_m,\phi_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_0, f) \\ \dots \\ (\phi_m, f) \end{bmatrix}$$

$$(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k=0}^{n} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k), \quad (\phi_i, f) = \sum_{k=0}^{n} \phi_i(x_k) f_k$$

Regra dos trapézios:

$$T_N(f) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_N) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right]$$

$$E_N^T(f) = -\frac{(b-a)\,h^2}{12} f''(\xi) \qquad \xi \in (a,b)$$

Regra de Simpson:

$$S_N(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_N) + 4\sum_{i=1}^{N/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{N/2-1} f(x_{2i}) \right], \; E_N^S(f) = -\frac{(b-a)\,h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \qquad \xi \in (a,b)$$