Resolução

1(a) Para $f(x_1, x_2, x_3) = (3\,x_1 + x_2 - 4, \sin x_1 - 2\,x_2 - 1, x_3 - 1)^T$, resulta $f(w^{(0)}) = (-3, -3, \alpha - 1)^T$. Como

$$J(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ \cos(x_1) & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a primeira iterada do método de Newton é calculada resolvendo o sistema linear $J(w^{(0)})\,\Delta w^{(0)} = -f(w^{(0)})$, ou seja, o sistema $A\,w = c$ dado.

Como $\Delta w^{(0)} = w^{(1)} - w^{(0)} = w$, logo $||w - w^{(1)}||_1 = ||w^{(0)}||_1 = 1 + \alpha$.

1(b) A partir do sistema $A\,w = c$, obtém-se

$$\begin{cases} w_1 = \dfrac{3 - w_2}{3} \\ w_2 = \dfrac{-3 + w_1}{2} = \dfrac{-3 + \frac{3-w_2}{3}}{2} = \dfrac{-6 - w_2}{6} \\ w_3 = 1 - \alpha \end{cases} \qquad (**)$$

pelo que o metodo iterativo de Jacobi tem a forma

$$\begin{cases} w_1^{(k+1)} = \dfrac{3 - w_2^{(k)}}{3} \\ w_2^{(k+1)} = \dfrac{-3 - w_1^{(k)}}{2} \\ w_3^{(k+1)} = 1 - \alpha \end{cases}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Logo, a respectiva matriz de iteração é

$$C_J = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que $||C_J||_\infty = max(1/2, 1/3) = 1/2 < 1$, este método converge para a solução do sistema dado, independentemente do vector inicial $w^{(0)}$.

1(c) Das equações $(**)$ resulta para o método de Gauss-Seidel,

$$\begin{cases} w_1^{(k+1)} = 1 - w_2^{(k)}/3 \\ w_2^{(k+1)} = -1 - w_2^{(k)}/6 \\ w_3^{(k+1)} = 1 - \alpha \end{cases}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

i.e.,

$$w^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} w^{(k)} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1-\alpha \end{bmatrix}$$

Por conseguinte, $||C_{GS}||_1 = max(0, 1/2) = 1/2$. Assim, para $\alpha = 1$, obtém-se

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= [1 - 1/3, -1 - 1/6, 0]^T = [2/3, -7/6, 0]^T \\ w^{(2)} &= [1 + 7/18, -1 + 7/36, 0]^T = [25/18, -29/36, 0]^T, \end{aligned}$$

logo $w^{(2)} - w^{(1)} = [13/18, 13/36, 0]^T$, e

$$\begin{aligned} ||w - w^{(2)}|| &\le \frac{||C_{GS}||_1}{1 - ||C_{GS}||_1} ||w^{(2)} - w^{(1)}||_1 \\ &\le ||w^{(2)} - w^{(1)}||_1 = 13/18 + 13/36 = 13/12 \simeq 1.08333. \end{aligned}$$

2(a)

x_i	f_i	$f[..]$	$f[...]$
3	$\alpha + 1 + 4\cos 3$		
4	5		
		7/2	
5	17/2		1/2
		9/2	
6	13		

Para $x \ge \pi$ a função f é polinomial de grau 2. Por conseguinte o polinómio interpolador nos três últimos nós da tabela coincide com f. Isto é, $q(x) = f(x),\ x \ge \pi$. Logo, $q(5.2) = f(5.2) = 9.32$. De facto, da tabela de diferenças divididas acima resulta

$$q(x) = 5 + 7/2\,(x-4) + 1/2\,(x-4)\,(x-5) = x^2/2 - x + 1.$$

2(b) Sendo $f = (\alpha + 1 + 4\cos(3), 5, 17/2)^T$ e

$$\begin{aligned} \phi_0 &= (\sin 3, \sin 4, \sin 5)^T \\ \phi_1 &= (\sin 6, \sin 8\ \sin 10)^T \\ \Psi &= c_1\,\phi_0 + c_2\,\phi_1 \end{aligned}$$

a melhor aproximação de mínimos quadrados satisfaz a condição $||f - \Psi||_2^2 = min \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ se e só se

$$\begin{bmatrix} (\phi_0, \phi_0) & (\phi_0, \phi_1) \\ (\phi_0, \phi_1) & (\phi_1, \phi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \phi_0) \\ (f, \phi_1) \end{bmatrix}$$

Ora,

$$\begin{array}{l}(\phi_0, \phi_0) = \sin^2(3) + \sin^2(4) + \sin^2(5) \simeq 1.5122 \\ (\phi_0, \phi_1) = \sin(3)\,\sin(6) + \sin(4)\,\sin(8) + \sin(5)\,\sin(10) \simeq -0.266505 \\ (\phi_1, \phi_1) = \sin^2(6) + \sin^2(8) + \sin^2(10) \simeq 1.35286\end{array}$$

Logo, a matriz A do sistema a resolver, arredondada, é

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.27 \\ -0.27 & 1.4 \end{bmatrix}$$

e $c = (c_1, c_2)^T$, $\omega = ((\phi_0, f), (\phi_1, f))^T$.

2(c) A função f não é contínua em $x = \pi$. Assim, embora a regra $S(f) = 1/3\,(f(3) + 4\,f(4) + f(5))$ produza um número real, a fórmula de erro não é aplicável pois esta só é válida para funções de classe C^4 (pelo menos), no intervalo considerado.

2(d) Seja $I = \int_4^6 (\alpha+1)\,f(x)dx = (\alpha+1)\,\int_4^6 f(x)dx$. Pela regra dos trapézios

$$\int_4^6 f(x)dx \simeq h/2\,(f(4) + 2\,f(5) + f(16)) = 1/2(5 + 17 + 13) = 35/2 = 17.5.$$

Assim, $I \simeq (\alpha + 1) * 17.5$.