Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Experimental (LMAC) – 1º Semestre de 2011/2012

Exame – 8 de Fevereiro de 2012

1. Considere o seguinte pseudocódigo

> `code`$[n : n \geq 2$ número natural$]$
> $i \leftarrow 2;$
> $list \leftarrow \{\};$
> **while** $i \leq n$ **do**
> $s \leftarrow$ soma dos divisores de i;
>   **if** $s = 2i$ **then**
> $list \leftarrow \{list, i\};$
>   **end if**
> $i \leftarrow i + 1;$
> **end while**
> $output : \{list\}$

a) Escreva o pseudocódigo `code` em linguagem `Mathematica`. **[1.5]**

b) Se executar `code[10]` qual será o resultado? Justifique. **[1.0]**

2. Conjectura-se que qualquer inteiro ímpar $n > 5$ se pode escrever como $n = p_1 + 2p_2$, onde p_1 e p_2 são números primos.

a) Admitindo que a conjectura é verdadeira, escreva um código `Mathematica` que, dado n, devolva uma lista $\{p_1, p_2\}$ de números primos tais que $n = p_1 + 2p_2$. **[1.5]**

b) Se testasse o seu código com $n = 55$ qual seria o resultado? Justifique. **[1.0]**

3. Seja $\{f_n\}_{n\geq 0}$ a sucessão de Fibonacci.

a) Mostre que quaisquer dois números consecutivos de Fibonacci, $\{f_n, f_{n+1}\}$, $n \geq 1$, são primos relativos. **[1.0]**

b) Utilize a fórmula de Binet para mostar que $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = r$, onde $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **[1.0]**

4. Sem utilizar o comando `FromContinuedFraction`, escreva um programa `Mathematica` que, dada uma lista de inteiros `lista=`$\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, com $a_0 \geq 0$ e $a_k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, devolva o número racional irredutível $m/n, m, n \in \mathbb{N}$, cuja fracção contínua é $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$. **[2.0]**

5. **a)** Que resultado espera obter se executar a seguinte instrução `Mathematica`?

```
Cases[Range[20],x_/;!Divisible[3^(x-1)-1,x]]
```

Justifique a sua resposta. **[1.5]**

b) Sejam $m > n > 0$ dois naturais. Se executar as instruções

```
f[{x_,y_}]:={y,Mod[x,y]};
Last[NestWhileList[f,{m,n},#[[2]]>0 &]][[1]]
```

que resultado obterá? Justifique. **[1.5]**

6. Sejam $n, m > 0$ dois inteiros. Mostre que se $n^2 + m^2$ for um quadrado perfeito então 3 divide mn. **[1.5]**

7. Obtenha todas as soluções inteiras para a equação diofantina

$$35\,x + 243\,y = 18\,,$$

determinando primeiro uma solução particular $(x_p, y_p) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ pelo algoritmo de Euclides. **[1.5]**

8. **a)** Determine a fracção contínua de $x = \sqrt{17}$. **[1.0]**

b) Determine todos os pares de naturais $\{p, q\}$, para $1 \leq q \leq 500$, tais que

$$\left|q\sqrt{17} - p\right| < \left|n\sqrt{17} - m\right|\,, \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}\,, \quad \frac{m}{n} \neq \frac{p}{q}\,, \quad n \leq q\,.$$ **[1.0]**

9. Seja n um inteiro tal que $2 \leq n \leq 8$. A representação do número fraccionário $1/n$ na base 6 é finita ou infinita? Caso seja infinita, determine a periodicidade da representação. Justifique as suas respostas. **[1.5]**

10. Escreva o método da bissecção em pseudocódigo. **[1.5]**