Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Experimental (LMAC) – 1º Semestre de 2011/2012

1º **Exame - Resolução**

1. **a)** Código `Mathematica`

```
iter[n_Integer /; n ≥ 1] := Module[{x0 = n, x1, niter, res},
  niter = 0;
  res = {x0};
  While[x0 ≠ 1,
   x1 = T[x0];
   AppendTo[res, x1];
   niter = niter + 1;
   x0 = x1;
  ];
  {niter, res}]
```

A função de Collatz

```
T[n_Integer] := If[EvenQ[n], n / 2, 3 n + 1]
```

b) O programa termina assim que $\mathbf{T^k[6] = 1}$ para algum $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$ o que acontece com $\mathbf{k} = 8$. Portanto **iter[6]** $\longrightarrow$

`{8, {6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1}}`

2. Basta considerar $a \geq 0$. O programa `Mathematica`:

```
divisao[a_Integer /; a ≥ 0, b_Integer /; b > 0] :=
 Module[{q = 0, r = a},
  If[a == 0,
   {q, r} = {0, 0},
   While[r ≥ b,
     r = r - b;
     q++
    ];
  ];
  ];
  {q, r}]
```

3. a) Todo o natural $n > 1$ é da forma $2k$ ou $2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Assim

$$n = 2k \qquad \Rightarrow \qquad n^2 = 4\,k^2\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

$$n = 2k + 1 \qquad \Rightarrow \qquad n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4\,(k^2 + k) + 1\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

ou seja n^2 é da forma $4k$ ou $4k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

b) Pela alínea anterior, se somarmos dois quadrados perfeitos obtemos como resultado $4k, 4k + 1$ ou $4k + 2$ mas nunca $4k + 3$.

4. Algoritmo de Euclides em pseudocódigo:

$$
\begin{array}{l}
\texttt{euclides}[a, b \text{ inteiros} : a \geq b > 0] \\
r_0 \leftarrow a; \\
r_1 \leftarrow b; \\
r_2 \leftarrow r_0 \bmod r_1; \\
\textbf{while } r_2 \neq 0 \textbf{ do} \\
\qquad \left\{ \begin{array}{l} r_0 \leftarrow r_1; \\ r_1 \leftarrow r_2; \\ r_2 \leftarrow r_0 \bmod r_1; \end{array} \right. \\
\textit{output} : r_1
\end{array}
$$

5. a) A instrução `Table[Prime[i],{i,5}]` cria uma lista com os primeiros 5 primos. O comando `Map[Function[x,2^x-1],...]` devolve o valor da função $f(x) = 2^x - 1$ para cada elemento dessa lista:

$$\texttt{Map[Function[x,2}^{\texttt{x}}\texttt{-1],Table[Prime[i],\{i,5\}]]} = \{2^2-1, 2^3-1, 2^5-1, 2^7-1, 2^{11}-1\}\,.$$

Os números $2^p - 1, p = 2, 3, 5, 7, 11$, são os 5 primeiros números de Mersenne:

$$\{2^2 - 1, 2^3 - 1, 2^5 - 1, 2^7 - 1, 2^{11} - 1\} = \{3, 7, 31, 127, 2047\}\,.$$

Conclui-se assim que

$$
\begin{aligned}
&\texttt{PrimeQ}\Big[\texttt{Map[Function[x,2}^{\texttt{x}}\texttt{-1],Table[Prime[i],\{i,5\}]]}\Big] \\
&\qquad = \{\texttt{True,True,True,True,False}\}\,,
\end{aligned}
$$

visto que $3, 7, 31$ e 127 são números primos, $2047 = 23 \cdot 89$ é um número composto e `PrimeQ` é um comando listável. (Prova-se facilmente, por exemplo pela divisão por tentativas, que 127 é primo e 2047 é composto.)

b) Seja `tabela` $= \{n_1, \ldots, n_7\}$, onde $n_k \in \mathbb{N}$ não é divisível por 3. O comando

$$\texttt{Map}[\texttt{Function[x,Mod[3}^{\texttt{x}}\texttt{-3,x]],tabela}]$$

devolve uma lista de inteiros não negativos $\{m_1, \ldots, m_7\}$ tais que

$$m_k \;=\; (3^{n_k} - 3) \mod \; n_k\,,$$

i.e. m_k é o resto da divisão de $3^{n_k} - 3$ por n_k.

Pequeno Teorema de Fermat diz-nos que se $p > 3$ for primo então

$$3^p \equiv 3 \pmod{p}\,.$$

Reciprocamente, se para algum inteiro $n \geq 4$

$$3^n \not\equiv 3 \pmod{n}\,,$$

então n é composto.

Visto que `tabela` $=$ `{0,0,2,0,0,6,6}`, o $3^{\text{o}}, 6^{\text{o}}$ e o 7^{o} elemento são obrigatoriamente números compostos (não divisíveis por 3).

Quanto aos restantes elementos, eles tanto podem ser primos (tirando o primo $p = 3$) como pseudoprimos de Fermat na base 3, i.e. números compostos n não divisíveis por 3 tais que $3^n \equiv 3 \pmod{n}$ (por exemplo, $n = 91 = 7 \cdot 13$) ou ainda iguais a 1.

6. Sendo $p > 3$ um primo é um número ímpar. Logo $p \equiv \pm 1 \pmod 3$ pelo que $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Assim

$$p^2 + 2 \equiv 1 + 2 \pmod 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad p^2 + 2 \equiv 0 \pmod 3\,,$$

ou seja $p^2 + 2$ é um número composto divisível por 3 (note-se que $p^2 + 2 > 3$).

7. a) A fracção contínua de n é uma fracção (simples) infinita periódica de período 2. Portanto n é um irracional quadrático (zero de um polinómio de grau 2 de coeficientes inteiros) e, em particular, um número algébrico (zero de um polinómio não nulo de coeficientes racionais). Temos ainda $n = 3 + x$ onde

$$x = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6\ + x}} = \frac{6 + x}{19 + 3x}\,.$$

Segue-se que

$$3\,(x^2 + 6x - 2) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -3 \pm \sqrt{11}\,,$$

donde vem $n = 3 + x = \sqrt{11}$.

b) Visto que $n = [3, 3, 6, 3, 6, \ldots]$, os primeiros 4 convergentes de n são

$$c_0 = 3\,, \quad c_1 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}\,, \quad c_2 = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6}} = \frac{63}{19}\,, \quad c_3 = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3}}} = \frac{199}{60}\,.$$

8. a) Código `Mathematica`

```
horner[a_List /; a ≠ {}] :=
 Module[{p = 0, k},
  k = Length[a];
  While[k ≥ 1,
   p = p * x + a[[k]];
   k--];
  p]
```

b) Sejam $a_j, j = 0, 1, \dots, n$, os coeficientes do polinómio $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ e seja $x_0 \in \mathbb{R}$. O algoritmo de Horner (para o cálculo de $p_n(x_0)$) consiste em determinar os valores das constantes $b_j, j = 0, \dots, n$, de b_n para b_0, pelas fórmulas recursivas

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_n \\
b_{n-1} &= a_{n-1} + b_n\, x_0 \\
b_{n-2} &= a_{n-2} + b_{n-1}\, x_0 \\
&\ \vdots \\
b_0 &= a_0 + b_1\, x_0\,.
\end{aligned}
$$

É fácil ver que

$$b_0 = a_0 + x_0\,(a_1 + x_0\ (a_2 + \cdots + x_0\,(a_{n-1} + a_n\, x_0))) = p_n(x_0)\,.$$

Chega-se ao valor de $p_n(x_0)$ com apenas n adições e n multiplicações.

9. a) Tem-se

$$
\begin{aligned}
(2.\overline{13})_5 &= 2 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^{-1} + 3 \cdot 5^{-2} + 1 \cdot 5^{-3} + 3 \cdot 5^{-4} + \dots \\
&= 2 + \frac{1}{5} \sum_{j=0}^{\infty} 5^{-2j} + \frac{3}{25} \sum_{j=0}^{\infty} 5^{-2j} + \frac{1}{5} \frac{1}{1 - 5^{-2}} + \frac{3}{25} \frac{1}{1 - 5^{-2}} \\
&= 2 + \frac{5}{25 - 1} + \frac{3}{25 - 1} = 2 + \frac{8}{24} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}\,.
\end{aligned}
$$

b) A representação de um número racional irredutível m/n na base b é finita se e só se cada factor primo de n for factor primo de b. Visto que $\mathrm{mdc}(7, 5) = 1$, a representação de $n/7$ na base 5 é infinita periódica. Mais, a periodicidade da representação coincide com a ordem de 5 módulo 7. Temos

$$5 \equiv 5 \pmod 7\,, \quad 5^2 \equiv 4 \pmod 7\,, \quad 5^3 \equiv 6 \pmod 7\,,$$

$$5^4 \equiv 2 \pmod 7\,, \quad 5^5 \equiv 4 \pmod 7\,, \quad 5^6 \equiv 1 \pmod 7\,,$$

ou seja a ordem de 5 módulo 7 e o periódo da representação de $n/7$ na base 5 é igual a 6.