Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Experimental (LMAC) – 1º Semestre de 2011/2012

Exame – 25 de Janeiro de 2012

1. Considere o seguinte pseudocódigo

iter[$n : n \geq 1$ número natural]
$x_0 \leftarrow n$;
$niter \leftarrow 0$;
$res \leftarrow \{x_0\}$;
while $x_0 \neq 1$ **do**
  $x_1 \leftarrow T(x_0)$;
  $res \leftarrow \{res, x_1\}$;
  $niter \leftarrow niter + 1$;
  $x_0 \leftarrow x_1$;
$output : \{niter, res\}$

onde $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a função de Collatz definida por $T(n) = n/2$ se n é par e $T(n) = 3n + 1$ se n é ímpar.

a) Escreva a função de Collatz e o pseudocódigo `iter` em linguagem `Mathematica`. **[1.5]**

b) Se executar `iter[6]` qual será o resultado? Justifique. **[1.0]**

2. Sem utilizar os comandos `Quotient` ou `Mod`, defina uma função `Mathematica` que, dados dois inteiros $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$, devolva uma lista $\{q, r\}$ onde q é o quociente e r o resto da divisão de a por b. **[1.5]**

3. Seja $n > 1$ um inteiro.

a) Mostre que n^2 é da forma $4k$ ou $4k + 1$ onde $k \in \mathbb{N}$. **[1.0]**

b) Mostre que nenhum inteiro da forma $4k + 3, k \in \mathbb{N}$, pode ser escrito como soma de dois quadrados. **[1.0]**

4. Escreva o algoritmo de Euclides, para o cálculo de máximo divisor comum de dois inteiros $a \geq b > 0$, em pseudocódigo. **[1.5]**

5. **a)** Diga, justificando, qual o resultado que obteria se executasse a seguinte instrução `Mathematica`

`PrimeQ[Map[Function[x,2^x-1],Table[Prime[i],{i,5}]]]` **[1.5]**

b) Seja `tabela` uma lista de inteiros positivos não divisíveis por 3. Se executar o comando

`Map[Function[x,Mod[3^x-3,x]],tabela]`

obterá o resultado `{0,0,2,0,0,6,6}`. O que pode dizer sobre os elementos da lista `tabela`? Primos, compostos? Justifique. **[1.5]**

6. Seja $p > 3$ um primo. Mostre que $p^2 + 2$ é um número composto. **[1.5]**

7. Seja $n > 0$ um número real. Executando a instrução `ContinuedFraction[n]` obtém-se a lista `{3,{3,6}}`.

a) Determine o número n e diga, justificando, se n é algébrico e/ou irracional quadrático. **[1.5]**

b) Calcule os quatro primeiros convergentes de n. **[1.5]**

8. Seja $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j$ um polinómio de grau $n \geq 1$.

a) Escreva um programa `Mathematica` que, dada uma lista com os coeficientes $a_j, j = 0, 1, \ldots, n$, devolva o polinómio p_n na forma (de Horner)

$$p_n(x) = a_0 + x\ (a_1 + x\ (a_2 + \cdots + x\ (a_{n-1} + a_n\, x)\,)\,)\ . \qquad \textbf{[1.5]}$$

b) Dados os coeficientes $a_j, j = 0, \ldots, n$, e um número real x_0, descreva o algoritmo de Horner para o cálculo de $p_n(x_0)$. **[1.0]**

9. **a)** Determine o número racional irredutível cuja representação na base 5 é dada pela expressão periódica $(2.\overline{13})_5$. **[1.5]**

b) Seja $n \leq 6$ um inteiro positivo. A representação do número fraccionário $n/7$ na base 5 é finita ou infinita? Caso seja infinita, determine a periodicidade da representação. Justifique as suas respostas. **[1.0]**