Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Unidade de Ensino de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Matemática Computacional (`LMat, MEEC, MEFT, MEQ`)

Exame/Teste de Recuperação – 30 de Janeiro de 2013

Justifique todas as respostas e apresente todos os cálculos que tiver que efetuar

1. Seja $p(x) = x^4 - 4\,x^2 + b$, $b \in \mathbb{R}$, um polinómio de grau 4 com as suas quatro raízes (reais ou complexas) dadas por

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{2+\sqrt{4-b}}\,, \qquad z_{3,4} = \pm\sqrt{2-\sqrt{4-b}}\,.$$

a) Suponha que $b < 4$ e prove que

$$|\delta_{\tilde{z}_i}| \approx \frac{|b|}{|\,16 - 4\,b \pm 8\,\sqrt{4-b}\,|}\;|\delta_{\tilde{b}}|\,, \qquad i = 1,2,3,4\,. \qquad \textbf{[1.5]}$$

b) Analise o condicionamento do problema do cálculo das raízes z_1, z_2, z_3 e z_4, quando $b \approx 0$. **[1.5]**

2. Considere a função real $f(x) = \ln(x^2+1) - x^2 + 1$.

a) Notando que a função f é par, mostre que o único zero real positivo da função pertence ao intervalo $(1,2)$. Quantas raízes reais possui a equação $f(x) = 0$? **[1.0]**

b) Mostre que a sucessão $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ gerada pelas fórmulas

$$\begin{cases} x_{n+2} = \dfrac{f(x_{n+1})\,x_n - f(x_n)\,x_{n+1}}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}\,, & n = 0,1,\ldots \\[2ex] x_0 = 1\,, \quad x_1 = 2\,, \end{cases} \qquad (1)$$

converge, com ordem de convergência supralinear, para o zero $z \in (1,2)$ de f. **[1.5]**

c) Calcule as iteradas x_2, x_3, x_4 e x_5 pelo método (1) e mostre que $|z - x_5| < 5\cdot 10^{-2}$. Pode usar, sem o demonstrar, que

$$-\frac{9}{4} \leq f''(x) \leq -2 \qquad \forall x \in [1,2]\,. \qquad \textbf{[1.5]}$$

3. Seja $g(x) = \ln x + 2$ uma função real definida para $x > 0$.

a) Localize graficamente os pontos fixos de g. **[0.5]**

b) Mostre que o método do ponto fixo $x_{n+1} = g(x_n), n = 0,1,\ldots$, converge monotonamente para o maior ponto fixo de g qualquer que seja $x_0 \geq 1$. **[1.0]**

c) Partindo de uma aproximação $x_0 \in [3,10]$, obtenha uma estimativa para o número de iterações do método do ponto fixo que garanta um erro inferior a 10^{-10}. **[1.5]**

Formulário

i. Erros, condicionamento e estabilidade numérica

Erros absoluto e relativo: $(x, \tilde{x} \in \mathbb{R}, \quad x \approx \tilde{x})$

$$e_{\tilde{x}} = x - \tilde{x}, \qquad \delta_{\tilde{x}} = \frac{e_{\tilde{x}}}{x},\, x \neq 0\,, \qquad \text{erro absoluto} : |e_{\tilde{x}}|, \qquad \text{erro relativo} : |\delta_{\tilde{x}}|,\, x \neq 0$$

Erros de arredondamento: $(x = \sigma(0.a_1a_2...)_\beta \beta^t,\ a_1 \neq 0; \quad \tilde{x} = fl(x) \in \mathrm{FP}(\beta, n, t_-, t_+))$

$$|e_{\tilde{x}}| \leq \beta^{t-n}, \quad |\delta_{\tilde{x}}| \leq \beta^{1-n} := U, \quad \text{arredondamento por corte}$$

$$|e_{\tilde{x}}| \leq \frac{1}{2}\beta^{t-n}, \quad |\delta_{\tilde{x}}| \leq \frac{1}{2}\beta^{1-n} := U, \quad \text{arredondamento simétrico}$$

Propagação de erros: $(x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \quad x \approx \tilde{x})$

$$e_{f(\tilde{x})} = f(x) - f(\tilde{x}) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\, e_{\tilde{x}_k}$$

$$\delta_{f(\tilde{x})} = \frac{e_{f(\tilde{x})}}{f(x)} \approx \sum_{k=1}^{n} p_{f,k}(x)\delta_{\tilde{x}_k}\,, \qquad p_{f,k}(x) = \frac{x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)}{f(x)},$$

$$\delta_{\tilde{f}(\tilde{x})} \approx \sum_{k=1}^{n} p_{f,k}(x)\delta_{\tilde{x}_k} + \sum_{k=1}^{m} q_k\, \delta_{\mathrm{arr}_k}$$

ii. Equações não-lineares

Se $f(z) = 0$, I um intervalo que contém z e $\tilde{z}$, e $f \in C^1(I)$ então $|z - \tilde{z}| \leq \dfrac{|f(\tilde{z})|}{\min_{x \in I} |f'(x)|}$

Método da secante: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)\dfrac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$

$$z - x_{k+1} = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(\eta_k)}(z - x_k)(z - x_{k-1}),\ \text{com } \xi_k, \eta_k \text{ num intervalo que contém } z, x_k \text{ e } x_{k-1}$$

$$|z - x_{k+1}| \leq \mathbb{K}\,|z - x_k|\,|z - x_{k-1}|\,, \quad \mathbb{K} = \frac{\max|f''|}{2\min|f'|}$$

Método de Newton: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$$z - x_{k+1} = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(z - x_k)^2,\ \text{com } \xi_k \text{ entre } z \text{ e } x_k$$

$$|z - x_k| \leq \frac{1}{\mathbb{K}}\left(\mathbb{K}|z - x_0|\right)^{2^k}$$

Método do ponto fixo: $x_{k+1} = g(x_k)$

$$|z - x_{k+1}| \leq \frac{L}{1 - L}|x_{k+1} - x_k|,$$

$$|z - x_k| \leq L^k|z - x_0|, \qquad |z - x_k| \leq \frac{L^k}{1 - L}|x_1 - x_0|$$

Resolução

1. a) Seja $z_i = z_i(b)$. Temos

$$\delta_{z_i(\tilde{b})} = \frac{b \, \frac{\partial z_i}{\partial b}}{z_i} \, \delta_{\tilde{b}} = \pm \frac{b}{4\big(\, b - 4 \pm 2\sqrt{4-b}\big)} \, \delta_{\tilde{b}}.$$

b) Temos

$$\lim_{b\to 0} \frac{b}{16 - 4b + 8\sqrt{4-b}} = 0 \,, \quad \lim_{b\to 0} \frac{b}{16 - 4b - 8\sqrt{4-b}} = -\,\frac{1}{2}\,.$$

O cálculo das raízes é um problema bem condicionado quando $b \approx 0$.

2. a) Tendo em conta que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e

$$f(\pm 1) = \ln 2 > 0\,, \quad f(\pm 2) = \ln 5 - 3 \approx -1.4 < 0\,, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty\,,$$

$$f'(x) = -\,\frac{2x^3}{1+x^2} \gtrless 0\,, \quad \text{quando} \quad x \lessgtr 0\,, \quad \big(\, f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0\big)\,,$$

a equação $f(x) = 0$ admite dois e apenas dois zeros $z_1 \in (-2,-1)$ e $z_2 \in (1,2)$.

b) As fórmulas (1) correspondem ao método da secante. O método da secante converge, com a ordem de convergência $r = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.618$, para o zero único da equação $f(x) = 0$ em $[a,b]$ $\forall x_0, x_1 \in [a,b]$ se $f \in C^2(a,b)$ satisfizer as condições

(i) $f(a)\, f(b) \leq 0$;

(ii) $f'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$;

(iii) $f''(x) \geq 0$ ou $f''(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$;

(iv) $$\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| \leq b - a\,, \qquad \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| \leq b - a\,.$$

No intervalo $(1,2)$, temos

$$f(1)f(2) < 0\,, \qquad f'(x) < 0 \quad \forall x \in (1,2)\,, \qquad f''(x) = -\,\frac{2\,x^2\,(3+x^2)}{(1+x^2)^2} < 0 \quad \forall x \in (1,2)\,,$$

$$\left|\frac{f(1)}{f'(1)}\right| = 0.693 < 1\,, \qquad \left|\frac{f(2)}{f'(2)}\right| = 0.435 < 1\,.$$

As condições suficientes de convergência são satisfeitas e o método da secante, i.e. a sucessão $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, converge para a raiz única de f em $(1,2)$ com ordem de convergência supralinear.

c) Obtém-se pelo método (1)

$$x_2 = \frac{f(x_1)\,x_0 - f(x_0)\,x_1}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{\ln\frac{5}{4} - 3}{\ln\frac{5}{2} - 3} \approx 1.33265\,, \quad x_3 \approx 1.43263\,, \quad x_4 \approx 1.46761\,, \quad x_4 \approx 1.46494\,.$$

Fórmula de erro do método da secante:

$$|z - x_{n+1}| \leq K\,|z - x_n|\,|z - x_{n-1}|\,, \qquad K = \frac{\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|}{2\,\min_{x\in[a,b]}|f'(x)|}\,.$$

Temos

$$\min_{x\in[1,2]}|f'(x)| = |f'(1)| = 1\,, \qquad \max_{x\in[1,2]}|f''(x)| = \frac{9}{4}\,.$$

Portanto

$$|z - x_2| \leq K\,|z - x_1|\,|z - x_0| = \frac{9}{8}\,|z-1|\,|z-2| \leq \frac{9}{32} = 0.28125\,, \quad \forall z \in (1,2)\,,$$

$$|z - x_3| \leq K\,|z - x_2|\,|z - x_1| \leq \frac{9}{8}\,\frac{9}{32} \approx 0.31641\,,$$

$$|z - x_4| \leq K\,|z - x_3|\,|z - x_2| \leq \left(\frac{9}{8}\right)^2 \left(\frac{9}{32}\right)^2 \approx 0.100\,,$$

$$|z - x_5| \leq K\,|z - x_4|\,|z - x_3| \leq \left(\frac{9}{8}\right)^4 \left(\frac{9}{32}\right)^3 \approx 0.036 < 0.05\,.$$

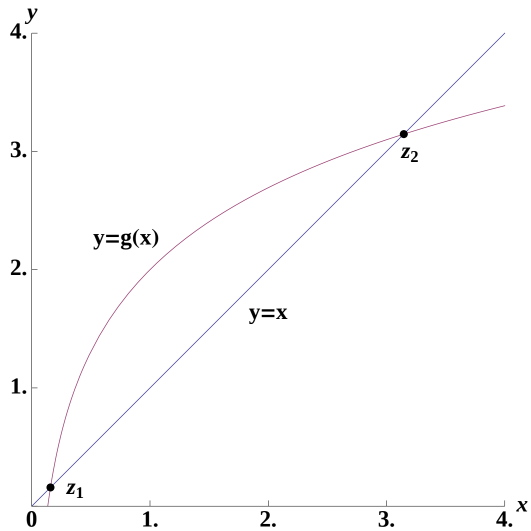
Notando que $z, x_5 \in I = [1,2]$ e que $f \in C^1(I)$ e $f'(x) \neq 0\ \ \forall x \in I$, podemos também usar a estimativa de erro

$$|z - x_5| \leq \frac{|f(x_5)|}{\min_{x\in I}|f'(x)|}\,.$$

Assim

$$|z - x_5| \leq \frac{0.000098}{1} < 10^{-4}\,.$$

3. a) Os gráficos de $y = x$ e $y = g(x)$



Os pontos $z_1 \in (0,1)$ e $z_2 \in (3,4)$ são os únicos pontos fixos de $g(x) = \ln x + 2$ visto que

$$g'(x) = \frac{1}{x} > 1 \quad \forall x < 1 \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{1}{x} < 1 \quad \forall x > 1\,.$$

b) Note-se que $x_n \geq 2 \;\; \forall n \geq 1$ se $x_0 \geq 1$. Seja $z \in (3,4)$ um ponto fixo de g. Temos, $\forall n \geq 1$

$$z - x_{n+1} = g(z) - g(x_n) = g'(\xi_n)\,(z - x_n) = \frac{1}{\xi_n}\,(z - x_n) < z - x_n\,, \quad \text{se} \;\; z > x_n\,,$$

$$x_{n+1} - z = \frac{1}{\xi_n}\,(x_n - z) < x_n - z\,, \quad \text{se} \;\; x_n > z\,,$$

onde $\xi_n \in (z; x_n)$. Além disso

$$z - x_{n+1} = \ln z - \ln x_n = \ln \frac{z}{x_n} > 0 \quad \text{se} \;\; z > x_n\,,$$

$$x_{n+1} - z = \ln x_n - \ln z = \ln \frac{x_n}{z} < 0 \quad \text{se} \;\; x_n > z\,.$$

Segue-se que

$$\text{se} \;\; x_0 < z \;\; \text{então} \;\; x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots < z\,,$$

$$\text{se} \;\; x_0 > z \;\; \text{então} \;\; z < \ldots < x_n < \ldots x_1 < x_0\,.$$

Considerando os intervalos

$$I = [2, z] \quad \text{se} \;\; x_0 < z$$

$$I = [z, x_0] \quad \text{se} \;\; x_0 > z\,,$$

conclui-se nos dois casos que $g(I) \subset I$ e $|g'(x)| < 1 \;\; \forall x \in I$. Portanto o método do ponto fixo converge monotonamente para o ponto fixo $z \in (3,4)$ de g qualquer que seja $x_0 \geq 1$.

c) Seja $I = [3, 10]$. Na alínea anterior provou-se que $g(I) \subset I$. Além disso $L = \max_{x \in I} |g'(x)| = \frac{1}{3}$ e $|z - x_0| \leq 7$. Da estimativa do erro $|z - x_n| \leq L^n\,|z - x_0|$, vem

$$|z - x_n| \leq 7 \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-10} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(7 \cdot 10^{10})}{\ln 3} \approx 22.73\,.$$

São necessárias 23 iterações.