Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Unidade de Ensino de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Matemática Computacional (`LMat, MEEC, MEFT, MEQ`)

Exame/Teste de Recuperação – Parte II – 30 de Janeiro de 2013

Justifique todas as respostas e apresente todos os cálculos que tiver que efectuar

1. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine a matriz de iteração C_J do método de Jacobi aplicado ao sistema dado e mostre que o método é convergente. **[1.0]**

b) Sabendo que a matriz de iteração do método de Gauss-Seidel é

$$C_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/8 & 1/4 \end{bmatrix}$$

verifique se o método converge e, no caso afirmativo, diga qual dos métodos considerados possui convergência mais rápida. Justifique convenientemente a sua resposta. **[1.0]**

2. Considere a função $f(x) = \cos x$ e os seus valores nos pontos $x_0 = 0,\ x_1 = \pi/16$ e $x_2 = \pi/8$.

a) Usando o polinómio $p(x)$ interpolador de Lagrange da função $f(x)$ nestes três pontos, calcule um valor aproximado de $\cos(\pi/32)$. **[1.0]**

b) Determine o valor da constante $a \in \mathbb{R}$ que minimiza o valor da soma $\sum_{i=0}^{2} [f(x_i) - (1 + a x_i^2)]^2$. **[1.5]**

3. Considere o integral $I = \int_{-1}^{1} e^{x^2} dx$.

a) Calcule uma aproximação de I pela regra dos trapézios composta com 3 intervalos. **[1.0]**

b) Considere a fórmula de quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq A_1[f(-1) + f(1)] + A_2[f(-x_1) + f(x_1)].$$

(i) Mostre que a regra é exacta para polinómios $p_k(x) = x^k$, para k inteiro positivo ímpar; **[1.0]**

(ii) Determine o sistema de equações que deveria resolver para determinar A_1, A_2 e x_1 para que esta fórmula de quadratura tenha pelo menos grau 5. (Não resolva o sistema). **[1.0]**

c) Tendo em conta o grau da fórmula de quadratura da alínea anterior e o grau da regra dos trapézios composta com 4 ou mais nós, será possível obter uma melhor aproximação de I por esta última regra? Justifique a resposta. **[1.0]**

4. Considere a equação diferencial

$$y''(x) = xy(x) + 1,$$

com as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$. Reduzindo a equação diferencial dada a um sistema de equações de primeira ordem, obtenha valores aproximados de $y(h)$ e de $y'(h)$ (com $h > 0$), efectuando um único passo do método de Heun. **[1.5]**