Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Unidade de Ensino de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Matemática Computacional (LMat, MEEC, MEFT, MEQ)

RESOLUÇÃO Parte II – 30 de Janeiro de 2013

1. a) Tem-se

$$C_J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim

$$det(C_J - \lambda I) = 0 \iff \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1/\sqrt{2}\ \lambda_2 = 1/\sqrt{2}$$

pelo que $\rho(C_J) = 1/\sqrt{2} < 1$ e o método de Jacobi é convergente.

b) Tem-se

$$det(C_{GS} - \lambda I) = 0 \iff \lambda_1 = 0 = \lambda_2 = 0\ \lambda_3 = 1/2$$

e como $\rho(C_{GS}) = 1/2 < 1$, o método de Gauss-Seidel é convergente. Dado que $\rho(C_{GS}) < \rho(C_J)$, o método de Gauss-Seidel é o mais rápido.

2. a) $p_2(x) = \dfrac{(x-\pi/16)(x-\pi/8)}{(-\pi/16)(-\pi/8)} + cos(\pi/16)\dfrac{x(x-\pi/8)}{(\pi/16)(\pi/16-\pi/8)} + cos(\pi/8)\dfrac{x(x-\pi/16)}{(\pi/8)(\pi/8-\pi/16)}.$

Daqui resulta $cos(\pi/32) \simeq p_2(\pi/32) = 0,995104$.

b) Consideram-se os pares de valores $(0,1)$ $(\pi/8, cos(\pi/8)$ $(\pi/16, cos(\pi/16)$, a função aproximadora $\phi(x) = 1 - ax^2 \iff \phi(x) - 1 = ax^2$ e a função de base $\phi_0(x) = x^2$.
Aplicando o método dos mínimos quadrados tem-se

$$a\sum_{i=0}^{2} x_i^2 x_i^2 = \sum_{i=0}^{2} x_i^2(\phi(x_i) - 1)$$

isto é

$$a[(\pi/16)^4 + (\pi/8)^4] = (\pi/16)^2(cos(\pi/16) - 1) + (\pi/8)^2(cos(\pi/8) - 1)$$

donde resulta $a = -0.493889$.

3. a) Os pontos de integração são: $x_0 = -1; x_1 = -1/3; x_2 = 1/3; x_3 = 1$ e $h = 2/3$.
Tem-se então:

$$I \simeq 1/3(2e + 2e^{(-1/3)^2} + 2e^{(1/3)^2}) = 3.30221$$

.

b) (i) Seja k inteiro positivo ímpar e $p_k(x) = x^k$. Tem-se $\int_{-1}^{1} x^k dx = 0, \forall k$. Por outro lado, $p_k(-1) + p_k(1) = 0$ e $p_k(-x_1) + p_k(x_1) = 0$. Logo a fórmula de quadratura é exacta para quaisquer valores de A_1, A_2 e x_1.

b) (ii) Uma vez que a fórmula de quadratura é exacta para x, x^3 e x^5 basta escrever o sistema exigindo que ela seja exacta para 1, x^2 e x^4, ficando-se com um sistema de 3 equações a 3 incógnitas. Tem-se $\int_{-1}^{1} 1dx = 2$, $\int_{-1}^{1} x^2 dx = 2/3$, $\int_{-1}^{1} x^4 dx = 2/5$, e por conseguinte

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ A_1 + x_1^2 A_2 = 1/3 \\ A_1 + x_1^4 A_2 = 1/5. \end{cases}$$

c) O método dos trapézios (simples ou composto) tem grau de precisão igual a 1. É possível obter uma melhor aoroximação do integral pelo método dos trapézios composto desde que se utilize um número suficientemente grande de subintervalos. Isto justifica-se facilmente pela fórmula do erro do método dos trapézios composto.

4. O método de Heun para uma equação diferencial de primeira ordem é dado por

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)),$$

isto é

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

com

$$K_1 = f(x_i, y_i); \; K_2 = f(x_{i+1}, y_i + hK_1).$$

A equação diferencial dada é de segunda ordem. Transforma-se este problema de valor inicial no seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} y'(x) = z(x) \\ z'(x) = xy(x) + 1 \\ y(0) = 1, \; z(0) = 1 \end{cases}$$

O método de Heun aplicado a este sistema escreve-se na forma

$$\begin{bmatrix} y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} k_1 + k_2 \\ l_1 + l_2 \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ l_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_i, y_i, z_i) \\ f_2(x_i, y_i, z_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_i \\ x_i y_i + 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} k_2 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_{i+1}, y_i + hk_1, z_i + hk_1) \\ f_2(x_{i+1}, y_i + hl_1, z_i + hl_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_i + hk_1 \\ x_{i+1}(y_i + hl_1) + 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se então

$$\begin{bmatrix} y(h) \\ y'(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 1 + 1 + h \\ 1 + h(1 + h) + 1 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$y(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2}$$

$$y'(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2}.$$