Matemática Computacional (Mestrado em Engenharia Física Tecnológica)

Exame/Teste de Recuperação – 20 de Janeiro de 2012

1º **Teste**

1. Considere a função real $f(x) = e^x - e^{-x}$ e o algoritmo

$$z_1 = e^x\,, \qquad z_2 = e^{-x}\,, \qquad z_3 = z_1 - z_2\,.$$

para o cálculo de $f(x)$ quando $x \sim 0$. Mostre que o problema é bem condicionado e analise a estabilidade numérica do algoritmo proposto. **[2.0]**

2. Considere a função iteradora $g(x) = 3\sin(x-1)$.

a) Trace os gráficos $y = x$ e $y = g(x)$ e localize aproximadamente os três pontos fixos z_1, z_2 e z_3 de g. **[0.5]**

b) O método iterativo

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n), & n = 0, 1, \ldots \\ x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{z_1, z_2, z_3\} \end{cases}$$

converge localmente para os pontos fixos de g? Justifique a sua resposta. **[1.0]**

c) Considere a função $f(x) = x - g(x)$. Mostre que f tem um e um só zero no intervalo $I = [-2, -1]$ e que as condições suficientes de convergência do método da secante são satisfeitas em I. Tome $x_0 = -1, x_1 = -2$ e calcule três iteradas pelo método da secante. Obtenha um majorante para o erro da iterada x_4. **[2.0]**

3. Seja $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ uma matriz simétrica e definida positiva e sejam $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$ os seus valores próprios. Mostre que o método iterativo

$$\begin{cases} x^{(n+1)} = x^{(n)} - \theta\, A\, x^{(n)} + \theta\, b\,, & n = 0, 1, \ldots\,, \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^N\,, \end{cases}$$

onde $b \in \mathbb{R}^N$ é um vector dado, converge para a solução única do sistema linear $Ax = b$ desde que $\theta \in \left(0, \frac{2}{\lambda_N}\right)$. Determine o valor de θ que minimiza o raio espectral da matriz de iteração. **[2.0]**

4. Considere o sistema linear $Ax = b$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Sabendo que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0.5 & 0 \\ 0.125 & -0.25 & 0.5 \end{pmatrix},$$

analise a convergência dos métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel para a solução do sistema linear. **[1.5]**

b) Tome $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$ e determine as três primeiras iteradas pelo método de Gauss-Seidel. Quantas iteradas são necessárias para que o erro da última iterada seja inferior a 10^{-10}. **[1.0]**

2^{o} **Teste**

1. Seja $p_2(x) = (1-x)\,(2x-5)$ o polinómio interpolador de grau ≤ 2 de uma função f nos pontos $\{0,1,2\}$ e $q_2(x) = (x-1)^2$ o polinómio interpolador de grau ≤ 2 de f nos nós $\{-1,1,2\}$.

Determine o polinómio p_3, de grau ≤ 3, que interpola f nos pontos $\{-1,0,1,2\}$. **[2.0]**

2. Determine a melhor aproximação mínimos quadrados polinomial de grau ≤ 4 de $f(x) = 63\,x^5 - 70\,x^3 + 15\,x$ no intervalo $[-1,1]$, i.e. resolva o problema de minimização

$$\min_{p_4 \in \mathcal{P}_4[-1,1]} \int_{-1}^{1} \Big(f(x) - p_4(x) \Big)^2 \,\mathrm{d}x\,. \qquad [\mathbf{2.0}]$$

3. Considere a seguinte fórmula de quadratura

$$Q(f) = A_0 f(-1) + A_1 f(-x_0) + A_1 f(x_0) + A_0 f(1)\,,$$

onde $A_0, A_1 \in \mathbb{R}$ e $x_0 > 0$, para a aproximação numérica do integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Determine x_0, A_0 e A_1 de modo a que a quadratura $Q(f)$ seja exacta para polinómios de grau ≤ 4. Qual é o grau de precisão da quadratura obtida? Supondo que $f \in C^\infty([-1,1])$, obtenha uma expressão para o erro $I(f) - Q(f)$. **[2.0]**

4. Considere a fórmula de quadratura de Gauss-Legendre $Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$, para a aproximação numérica do integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. Sabendo que os nodos $x_j, j = 0,\ldots,n$, da quadratura Q_n são os zeros do polinómio de Legendre $P_{n+1}(x)$, mostre que os pesos A_j podem ser determinados pelas fórmulas

$$A_j = \frac{1}{P'_{n+1}(x_j)} \int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_j}\,dx\,, \qquad j = 0,\ldots,n\,. \qquad [\mathbf{1.5}]$$

5. Considere o seguinte método multipasso

$$y_{n+3} - y_n = \frac{3h}{4}\Big(f(t_n, y_n) + 3f\,(t_{n+2}, y_{n+2}) \Big), \quad n \geq 0\,. \qquad (1)$$

a) Mostre que o método (1) é consistente e determine a sua ordem de consistência. **[1.5]**

b) Prove que o método (1) é convergente. **[1.0]**