

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Computacional (Mestrado em Engenharia Física Tecnológica)

1 Conceitos Básicos – Exercícios

1. Represente x num sistema de ponto flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, nos seguintes casos

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x = 1/6 & \text{b)} x = 1/3 & \text{c)} x = -83784 \\ \text{d)} x = -83785 & \text{e)} x = 83798 & \text{f)} x = 0.0013296 \end{array}$$

2. Considere os valores

$$A = 0.492, \quad B = 0.603, \quad C = -0.494, \quad D = -0.602, \quad E = 10^{-5}.$$

Com a finalidade de calcular

$$F = \frac{A + B + C + D}{E},$$

dois alunos, usando uma máquina com três dígitos na mantissa e com arredondamento simétrico, efectuaram as contas de forma distinta, mas aritmeticamente equivalente. O aluno X calculou $A + B$, depois $C + D$, somou os valores, e dividiu por E , obtendo $F = 0$. Por seu turno, a aluna Y calculou $A + C$, depois $B + D$, somou os valores, e dividiu por E , tendo obtido $F = -100$.

Verifique os cálculos efectuados pelos alunos e comente a disparidade de resultados obtidos, atendendo a que se usaram processos matematicamente equivalentes.

3. Considere os números $x = \pi$ e $y = 333/106$.

a) Obtenha aproximações \tilde{x} e \tilde{y} para x e y , respectivamente, num sistema de ponto flutuante FP(10,6,-10,10) com arredondamento simétrico.

b) Determine os erros absolutos e relativos de \tilde{x} e \tilde{y} .

c) Calcule, efectuando as operações num sistema FP(10,6,-10,10) com arredondamento simétrico, valores aproximados das quantidades

$$x * y, \quad \frac{x}{y}, \quad x + y, \quad x - y.$$

Determine ainda os erros absolutos e relativos das quantidades calculadas.

d) Determine o número de algarismos significativos que se pode garantir a cada um das quantidades calculadas na alínea anterior.

e) Repita as alíneas a) e b), e a parte respeitante à quantidade $x - y$ das alíneas c) e d), considerando um sistema FP(10, 9, -10, 10) com arredondamento simétrico.

4. Considere o cálculo da função $f(x, y) = x^2 - y^2$ pelos seguintes algoritmos:

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, calcular

- (a) $z_1 = x^2, \quad z_2 = y^2, \quad z_3 = z_1 - z_2;$
- (b) $z_1 = x + y, \quad z_2 = x - y, \quad z_3 = z_1 z_2;$
- (c) $z_1 = x + y, \quad z_2 = x z_1, \quad z_3 = y z_1, \quad z_4 = z_2 - z_3.$

a) Determine as expressões dos erros relativos dos três algoritmos.

b) Supondo que x e y são representados exactamente no computador, determine para cada algoritmo condições para as quais este algoritmo é melhor do que os outros.

5. Determine o erro relativo cometido no cálculo do determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5.7432 & 7.3315 \\ 6.5187 & 8.3215 \end{bmatrix}$$

se utilizar um sistema de ponto flutuante com mantissa de comprimento 6. Idem, utilizando um sistema de ponto flutuante com mantissa de comprimento 5. Comente.

6. Ao calcular-se a expressão

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

numa máquina usando o sistema de ponto flutuante FP(10,6,-30,30) com arredondamento simétrico, verificou-se que para valores de x muito grandes o erro relativo era também muito elevado.

a) Verifique que o erro relativo é de 100% para $x = 2000$. Qual o valor do erro relativo para valores de x ainda maiores?

b) Qual a razão deste erro relativo grande; o problema é mal condicionado ou há instabilidade numérica? Justifique e apresente uma forma de calcular $f(x)$ que não apresente erro relativo tão grande.

7. Considere o polinómio definido por

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

e os dois seguintes algoritmos para o cálculo de $f(x)$:

$$(1) \quad f_1(x) = x * (x * x) + a * (x * x) + b * x + c,$$

$$(2) \quad f_2(x) = ((x + a) * x + b) * x + c.$$

O algoritmo (2) é designado por algoritmo de Horner.

a) Para $a = -6.1, b = 3.2, c = 1.5$, calcule o valor exacto de $f(4.71)$.

b) Para $a = -6.1, b = 3.2, c = 1.5$, e supondo que efectua os cálculos no sistema FP(10, 3, -10, 10), com arredondamento simétrico, calcule valores aproximados de $f(4.71)$ usando os dois algoritmos indicados.

- c) Determine os erros relativos dos valores obtidos na alínea anterior.
- d) Determine a expressão do erro relativo do algoritmo de Horner em termos dos erros relativos de a, b, c, x e dos erros de arredondamento das operações efectuadas.

8. Considere o cálculo de $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ para valores de x próximos de zero.

a) Mostre que o problema é bem condicionado.

b) Analise a estabilidade numérica do algoritmo

$$z_1 = x + 1, \quad z_2 = \sqrt{z_1}, \quad z_3 = z_2 - 1,$$

quando $x \approx 0$.