

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Computacional (Mestrado em Engenharia Física Tecnológica)

1 Conceitos Básicos – Exercícios

1. Represente x num sistema de ponto flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, nos seguintes casos

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x = 1/6 & \text{b)} x = 1/3 & \text{c)} x = -83784 \\ \text{d)} x = -83785 & \text{e)} x = 83798 & \text{f)} x = 0.0013296 \end{array}$$

2. Considere os valores

$$A = 0.492, \quad B = 0.603, \quad C = -0.494, \quad D = -0.602, \quad E = 10^{-5}.$$

Com a finalidade de calcular

$$F = \frac{A + B + C + D}{E},$$

dois alunos, usando uma máquina com três dígitos na mantissa e com arredondamento simétrico, efectuaram as contas de forma distinta, mas aritmeticamente equivalente. O aluno X calculou $A + B$, depois $C + D$, somou os valores, e dividiu por E , obtendo $F = 0$. Por seu turno, a aluna Y calculou $A + C$, depois $B + D$, somou os valores, e dividiu por E , tendo obtido $F = -100$.

Verifique os cálculos efectuados pelos alunos e comente a disparidade de resultados obtidos, atendendo a que se usaram processos matematicamente equivalentes.

3. Considere o cálculo da função $f(x, y) = x^2 - y^2$ pelos seguintes algoritmos:

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, calcular

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & z_1 = x^2, & z_2 = y^2, & z_3 = z_1 - z_2; \\ \text{(b)} & z_1 = x + y, & z_2 = x - y, & z_3 = z_1 z_2; \\ \text{(c)} & z_1 = x + y, & z_2 = x z_1, & z_3 = y z_1, & z_4 = z_2 - z_3. \end{array}$$

a) Determine as expressões dos erros relativos dos três algoritmos.

b) Supondo que x e y são representados exactamente no computador, determine para cada algoritmo condições para as quais este algoritmo é melhor do que os outros.

4. Determine o erro relativo cometido no cálculo do determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5.7432 & 7.3315 \\ 6.5187 & 8.3215 \end{bmatrix}$$

se utilizar um sistema de ponto flutuante com mantissa de comprimento 6. Idem, utilizando um sistema de ponto flutuante com mantissa de comprimento 5. Comente.

5. Ao calcular-se a expressão

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

numa máquina usando o sistema de ponto flutuante FP(10,6,-30,30) com arredondamento simétrico, verificou-se que para valores de x muito grandes o erro relativo era também muito elevado.

a) Verifique que o erro relativo é de 100% para $x = 2000$. Qual o valor do erro relativo para valores de x ainda maiores?

b) Qual a razão deste erro relativo grande; o problema é mal condicionado ou há instabilidade numérica? Justifique e apresente uma forma de calcular $f(x)$ que não apresente erro relativo tão grande.

6. Mostre que, usando a aproximação $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, se têm as seguintes estimativas para o erro absoluto e relativo:

$$|e_{\cos(x)}| \leq \frac{1}{2880} \sim 0.35 \times 10^{-3} \quad |\delta_{\cos(x)}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2880}$$

para qualquer $x \in [-\pi/4, \pi/4]$.

7. Considere a função real de variável real

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

a) Calcule $f(10^{-6})$ usando a fórmula anterior.

b) Obtenha uma aproximação de $f(10^{-6})$ usando o desenvolvimento de f em série de Taylor em torno de $x = 0$.

c) Sabendo que $1 - \cos(x) = 2 \sin^2(x/2)$, calcule $f(10^{-6})$ usando uma nova fórmula para f .

d) Compare os valores obtidos nas alíneas anteriores e comente.

8. Determine uma função f que verifique

$$\delta_{f(x)} \approx x \cos(x) \delta_x$$