Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Computacional (Mestrado em Engenharia Física Tecnológica)

2. Resolução numérica de equações não lineares – Exercícios

1. Seja $\{x_n\}$ uma sucessão convergente para z. Mostre que se existir o limite

$$K_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - z|}{|x_n - z|},$$

então também existe

$$K'_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|},$$

e $K'_\infty = K_\infty$.

2. Mostre que a sucessão $\{x_n\}$ definida por

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 6)}{3x_n^2 + 2}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

converge para $\sqrt{2}$ qualquer que seja $x_0 > 0$. Determine a ordem e o coeficiente assimptótico de convergência. A sucessão $\{x_n\}$ convergirá para $x_0 \leq 0$?

3. Considere a equação $\sin(x) - e^{-x} = 0$.

a) Prove que esta equação tem uma raiz $z \in [0.5, 0.7]$.

b) Efectue duas iteradas pelo método da bissecção e indique um novo intervalo que contenha z, assim como um majorante para o erro absoluto de x_2.

c) Determine o número m de iterações necessárias para garantir $|z - x_m| < 10^{-6}$.

4. Seja g uma função contínua tal que $g(a) = b$ e $g(b) = a$.

a) Mostre que existe pelo menos um ponto fixo de g em $[a, b]$.

b) Mostre que se $g \in C^1([a, b])$ então a derivada de g toma o valor -1 em algum ponto desse intervalo. O que pode concluir quanto a contractividade de g nesse intervalo?

5. Verifique se as seguintes sucessões têm convergência linear e, em caso afirmativo, calcule os seus coeficientes assimptóticos de convergência.

a) $x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{(n+1)^p}, \qquad (p > 1), \qquad n = 0, 1, \ldots$

b) $x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = x_n + \dfrac{a^n}{(n+1)!}, \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad n = 0, 1, \ldots$

c) $x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = x_n + \dfrac{n^2}{2^n}, \qquad n = 0, 1, \ldots$

6. Considere a sucessão $\{x_n\}$ definida por

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \sin x_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

a) Mostre que a sucessão converge e calcule o seu limite.

b) Determine a ordem de convergência da sucessão $\{x_n\}$.

7. Considere a equação

$$x^3 + \frac{1}{2^m} = x + \frac{1}{8^m}$$

a) Mostre que para qualquer $m \geq 0$ há apenas uma raiz em $[0, \frac{1}{2}]$.

b) Mostre que se $m \in \mathbb{N}$ o método da bissecção atinge essa raiz num número finito de iteradas.

c) O mesmo que em b) para a equação $x^3 + 2x + 2^{-m} = 3x^2 + 8^{-m}$, aplicando ao intervalo $[1, \frac{3}{2}]$.

8. Considere um intervalo $I = [a, b]$ que contem um único ponto fixo z duma função $g \in C^1(I)$. Seja $g'(z) = 1$.

a) Mostre que se $0 < g'(x) < 1, \forall x \in I \backslash \{z\}$, então o método do ponto fixo converge qualquer que seja $x_0 \in I$. (*Sugestão*: Verifique que a sucessão definida pelo método do ponto fixo é estritamente monótona e limitada).

b) Aplique este resultado para mostrar que $x_{n+1} = \sin(x_n)$ converge para 0, qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$.

9. Determine, pelo método de Newton e com erro inferior a 10^{-4}, o valor mínimo de $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$a\sqrt{x} \geq \sin x, \qquad \forall\, x \geq 0.$$

10. Seja $g \in C^1(\mathbb{R})$ uma função tal que $g(x) \leq g(\mu) = \gamma, \forall\, x \in \mathbb{R}$ e considere o método iterativo

$$x_{n+1} = \mu + g(x_n) - \gamma.$$

Mostre que este método converge para μ desde que x_0 seja considerado suficientemente próximo de μ. Determine a sua ordem da convergência.

11. Considere o seguinte método iterativo

$$x_0 \in \mathbb{R}, \quad x_{m+1} = \frac{\alpha x_m + 1 + 2e^{-x_m}}{2 + \alpha}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-2\}$.

a) Mostre que para todo o $\alpha \in [0, 1]$ o método converge para a solução da equação

$$f(x) = e^x - 2xe^x + 2 = 0$$

qualquer que seja $x_0 \geq 0$. (*Sugestão* Utilize o teorema do ponto fixo no intervalo $[0, \max\{2, x_0\}]$).

b) Determine o valor de α de tal modo que a convergência seja a mais rápida possível.

c) Aplique o método para aproximar a solução da equação $f(x) = 0$ com um erro inferior a 10^{-5}.

12. Considere uma sucessão de números reais, definida por

$$x_0 = 1\,, \qquad x_{k+1} = 1 - \frac{1}{b\, x_k}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

onde $b \in \mathbb{R}$.

a) Com base no teorema do ponto fixo, mostre que, se $b > 4$ esta sucessão converge e que todos os seus termos estão no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$

b) Seja $b = \frac{25}{4}$. Através da definição de ponto fixo, calcule $z = \lim_{k \to \infty} x_k$.

c) Para esse valor de b, mostre que todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $[\frac{4}{5}, 1]$ e que se verifica

$$|x_{k+1} - z| \leq \frac{4}{75} \left(\frac{1}{4}\right)^k, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

13. Utilize o método de Newton para aproximar a (única) raiz da equação

$$x^3 - \cos x - 1 = 0\,,$$

no intervalo $[1, 2]$. Escolha o valor $x_0 = 1$ para iterada inicial e calcule as iteradas x_1 e x_2. Que tipo de convergência se tem? Indique uma estimativa para o erro absoluto de x_3.

14. Considere a equação $f(x) = x \tan x - 1 = 0$. Aplicando o método da secante, obtenha as três primeiras iteradas para o cálculo da raiz situada no intervalo $[0.8, 0.9]$. Determine um majorante do erro do resultado obtido.

15. Considere o polinómio $p(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 16$.

a) Mostre que o polinómio tem três raízes reais, $z_1 < z_2 < z_3$, tais que

$$z_1 \in [1.0, 1.2]\,, \qquad z_2 \in [2.6, 2.8]\,, \qquad z_3 \in [5.0, 5.2]\,.$$

b) Mostre que o método de Newton com iterada inicial $x_0 \in [1.0, 1.2]$ converge para a raiz z_1.

c) Utilize o método de Newton para obter um valor aproximado da raiz z_1 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

d) Mostre que o método de Newton com iterada inicial $x_0 \in [2.6, 2.8]$ converge para a raiz z_2 e obtenha uma aproximação de z_2 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

e) Mostre que o método da secante com iteradas iniciais $x_0, x_1 \in [5.0, 5.2]$ converge para a raiz z_3 e obtenha uma aproximação de z_3 pelo método da secante com um erro absoluto inferior a 10^{-6}